8 - VEKTORROM

I de to siste ukene har vi gjentatte ganger støtt på uttrykk som

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right) + Be^{-\frac{b}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right)$$

og

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3$$

og

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Disse er eksempler på noe som kalles **lineærkombinasjoner**. Det betyr at du tar noen vektorer, ganger dem med hver sin skalar, og så legger sammen alt. Men vent litt. Er

$$e^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t\right)$$

en vektor? Det er det. En vektor er noe som lever i et

Vektorrom (folkelig definisjon):

Mengden av alle lineærkombinasjoner av en vektormengde.

Med andre ord, kan du ta lineærkombinasjoner av det er det en vektor.

$\boxed{1}$ Bare å bli vant til dette.

Det finnes selvfølgelig aksiomer for vektorrom. De fleste av dem går med til å definere hvordan en lineærkombinasjon funker, og dette kan du i bunn og grunn allerede fra gymnaset.

Vektorrom (ordentlig definisjon):

La $\mathbf{V}$ være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres, og $\mathbb{K}$ en kropp. Vi sier at mengden $\mathbf{V}$ er et vektorrom over $\mathbb{K}$ dersom følgende er tilfredsstilt for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$, Det skal finnes en vektor, kalt $\mathbf{0}$, slik at

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

og kommutativ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

og vektorer

$$a\left(\mathbf{v} + \mathbf{w}\right) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}.$$

Vi må også kreve at

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

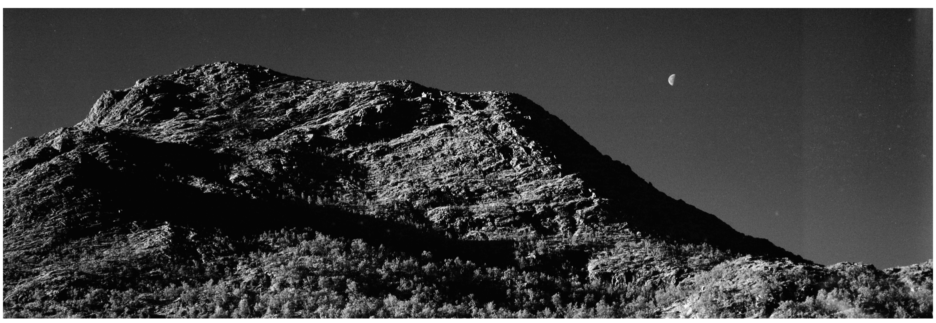
og at

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Disse trenger ikke du med mindre du har sett lyset, slik som følgende anonyme student på MTEL-SYS. Når vedkommende i evalueringsskjema ble spurt om det var noe vedkommende skulle ønske vedkommende hadde lært mer om, uttrykte vedkommende:

> "Vektor-rom. Trodde det var kjempe teit men det er faktisk ikke så dumt"

$\boxed{2}$ Du kjenner allerede til mange vektorrom, vi har bare ikke kalt det vektorrom. Se om du kan skrive ned et par. (Bruk den folkelige definisjonen, ikke den lange.)



Litt av vitsen med vektorrom er å få en presis definisjon av konseptet dimensjon. Alle har en intuitiv forståelse av dette. En linje har en dimensjon, en tegning på et ark har to, vi lever i tre, og posisjonen til et stivt fysisk legeme kan spesifiseres fullstendig med seks dimensjoner (tre til massesenterets posisjon og tre til legemets orientering i rommet).

Men det er andre ting som også har dimensjoner. Løsningene til

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

er et vektorrom med to dimensjoner:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$$

Det er to vektorer i lineærkombinasjonen, og to ubestemte koeffisienter. Komplekse tall er likeledes alle lineærkombinasjoner av to ting, real- og imaginærdel

$$z = a + bi$$

mens $\mathbb{R}^2$ er alle lineærkombinasjoner av to ting

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle lineærkombinasjoner på formen

$$y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er bare $\mathbb{R}^2$ skrevet litt annerledes. Alle polynomer av maksimal grad en er også et todimensjonalt vektorrom:

$$p(x) = a \cdot x + b \cdot 1,$$

så man kan i bunn og grunn tenke at

Dimensjon?

Antall vektorer i lineærkombinasjonen?

3 Men det er en liten hake ved dette. Hvor mange dimensjoner har

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ?$$

Her støter vi på et problem. Den ene vektoren er på sett og vis litt overflødig. Vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

har også to dimensjoner, siden de tre vektorene ligger i samme plan.

$\boxed{4}$ Løs likningssystemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ Når du har gjort det, kan du løse likningssystemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Hva med

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Hvis vi nå bare hadde trengt vektorer i $\mathbb{R}^3$, kunne vi holdt oss til å sjekke om vektorer ligger i samme plan eller på samme linje, men dette duger ikke i $\mathbb{R}^{17}$. Vi sier at vektorene i oppgave 5 er **lineært avhengige**, siden de kan lineærkombineres til nullvektoren:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Vektorene i oppgave 6 ligger ikke i samme plan, og den eneste måten å lineærkombinere dem til nullvektoren på, er å sette $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dette kalles

Lineær uavhengighet

Vi sier at vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Dersom vektorene i lineærkombinasjonene som utgjør vektorrommet er lineært uavhengige, kalles dette en **basis** for vektorrommet. Et vektorrom har alltid mange basiser. For eksempel har $\mathbb{R}^2$ basisen

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

siden alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineærkombinasjon av disse to. Men

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

er en like god basis for $\mathbb{R}^2$, for alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineærkombinasjon av disse to også. Mengden

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

er ikke en basis for $\mathbb{R}^2$, for den er lineært avhengig - de aller fleste vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan ikke skrives som en lineærkombinasjon av disse to.

$\boxed{7}$ Vis at to parallelle vektorer er en lineært avhengig vektormengde.

Det går an å bevise at dersom du har to basiser for et og samme vektorrom, må disse ha like mange elementer. [1] Derfor:

Dimensjon

Antall vektorer i basisen.

Vektorrommet $\mathbb{R}^5$ har fem dimensjoner fordi du trenger fem lineært uavhengige vektorer for å skrive et tilfeldig valgt punkt som en lineærkombinasjon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

men det finnes som sagt mange andre basiser for $\mathbb{R}^5$. Du trenger bare fem lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^5$, og så har du en basis.

$\boxed{8}$ Finn en annen.

Lineær uavhengighet er et mer abstrakt konsept enn determinanter, men også mer anvendelig, siden matrisen ikke trenger å være kvadratisk.

$\boxed{9}$ Løs likningssystemet

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

og kommenter resultatet. Er kolonnene i matrisene lineært uavhengige?

$\boxed{10}$ Vis at dersom

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er c_1, c_2,...,c_n entydig bestemt.

[1] Dette er litt for teknisk for oss.

Likninger kan også være lineært avhengige eller uavhengige.

11 Amund har høns og kyr på gården sin. Vrang av vane vil han ikke si hvor mange dyr han har, men opplyser heller at hvert av dyrene har $\frac{141}{382}$ bein i gjennomsnitt og at differansen mellom antall hoder er 41 og at det finnes totalt 382 bein og 141 hoder.

Hvor mange høns og hvor mange kyr har Amund? Har Amund gitt overflødig informasjon?

12 Likningene i likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 4x + 5y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

er lineært avhengige. I praksis betyr dette at en eller flere av likningene følger av en eller flere av de andre likningene. Hvilke likninger følger av de andre i dette systemet?

13 Er det noen likninger i likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 4x + 5y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

som følger av de andre?

En annen grunn til at den tekniske definisjonen av lineær uavhengighet er som den er, er at den kan brukes på ting som ikke ligger i noe plan eller på en linje eller er særlig geometrisk i det hele tatt. Funksjoner kan være lineært uavhengige eller ikke.

14 Er

$$e^{-t}\cos t \qquad \text{og} \qquad e^{-t}\sin t$$

lineært uavhengige?

15 Hva med

$$\cos^2 t \qquad \text{og} \qquad \sin^2 t \qquad \text{og} \qquad 1 \quad ?$$

16 Hva med

$$x^2 \qquad \text{og} \qquad x \qquad \text{og} \qquad 1 \quad ?$$

UKENS KJEMI

Når man skal finne ph i vandige likevekter, setter man opp protonbalansen, massebalansen og elektronøytraliteten. Her er det viktig å skjønne at likningssett kan være lineært avhengige.

$\boxed{1}$ Les avsnitt 1-3 i Sveins notat om ioniske likevekter i vann og forklar hvorfor det er viktig å kunne avgjøre om likninger er lineært uavhengige.

Dersom kolonnene i en matrise A er lineært avhengige, betyr dette at likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har ikketrivielle løsninger, altså andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Disse løsningene utgjør et vektorrom og kalles **nullrommet** til A. Nullrommet til A dukker opp når man vil balansere reaksjonslikninger.

$\boxed{2}$ Les litt her:
`https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/litteratur/skogestad.pdf`
og prøv selv å skrive opp atommatrisen til

$$a\mathrm{C_3H_6} + b\mathrm{NH_3} + c\mathrm{O_2} \to d\mathrm{C_3H_3N} + e\mathrm{H_2O}.$$

Finn nullrommet til atommatrisen og sjekk at du har funnet korrekt balansering.

Se også kap. 3 i Vegards oppgavesamling:
`https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/martaoppgaver.pdf`

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ La $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ være et lineært likningssystem. Utgjør $\mathbf{x}$ et vektorrom?

$\boxed{2}$ Danner sannsynlighetstetthetsfunksjoner et vektorrom?
`https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function`

$\boxed{3}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Er kolonnene i AB lineært uavhengige?

Av og til er det slik at ting er lineæralgebra selv om det ser ut som noe helt annet.

$\boxed{4}$ La

$$\begin{aligned} p(x) &= 8x^3 - 8x^2 - 4x - 6 \\ q(x) &= -7x^3 - 7x^2 + 5x + 6 \\ r(x) &= 3x^2 - 8x - 4 \end{aligned}$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^3 - 7x^2 - 3x?$$

$\boxed{5}$ La

$$p(x) = -6x^3 - 4x^2 - 8x + 8$$
$$q(x) = 6x^3 + 5x^2 - 7x - 7$$
$$r(x) = -4x^3 - 8x^2 + 3x$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^2 - 7x - 3?$$

$\boxed{6}$ Kan en lineært uavhengig vektormengde inneholde nullvektoren?

$\boxed{7}$ Hvor mange dimensjoner har vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \quad ?$$

$\boxed{8}$ Hva med

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3 \quad ?$$