6 - MATRISER

Matematikk handler mye om å se strukturer. I denne økten skal vi bli kjent med noe som kalles matriseregning. Det er ikke så vanskelig, men handler om å se gamle ting på litt nye måter.

Kom du et stykke i forrige ert, ble du eksponert for likningssystemet

$$\left.\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3 \end{array}\right.$$

som skrevet ut på gamlemåten blir

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{aligned}$$

Til nå har du pleid å skrive vektorer liggende. Du har skrevet

$$(1,2,5) \qquad \text{og} \qquad 2(1,2,5) = (2,4,10) \qquad \text{og} \qquad (1,2,5) + (2,4,10) = (3,6,15)$$

og så videre. Men om vi bare tar et lite typografisk grep og skriver alt på høykant istedet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

trengs det ikke store fantasien for å se at et lineært likningssystem er en likning mellom vektorer

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 = \mathbf{y}$$

der

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ La dette synke inn. Du må kanskje stirre litt på det en stund. [1]

[1]Du er antagelig mer vant til å skrive $x_1\mathbf{a}_1$ enn $\mathbf{a}_1x_1$ for produktet av vektor og skalar, så dette kan være litt uvant i starten. Har du glemt vektorregningen bør du kanskje freshe den opp litt:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_vector#Basic_properties`

Se nå på likningen

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{y}.$$

Venstresiden

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3$$

likner mistenkelig på et skalarprodukt mellom "vektoren" $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ og den ukjente $\mathbf{x}$. Denne nye vektoren kalles en matrise:

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

og vi tenker på

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

som et produkt mellom matrisen A og den ukjente $\mathbf{x}$. Merk at hver komponent i vektoren $A\mathbf{x}$ er et skalarprodukt slik du er vant til fra skolen. [2] Faktisk er det slik at $\mathbf{x}$ også er en matrise:

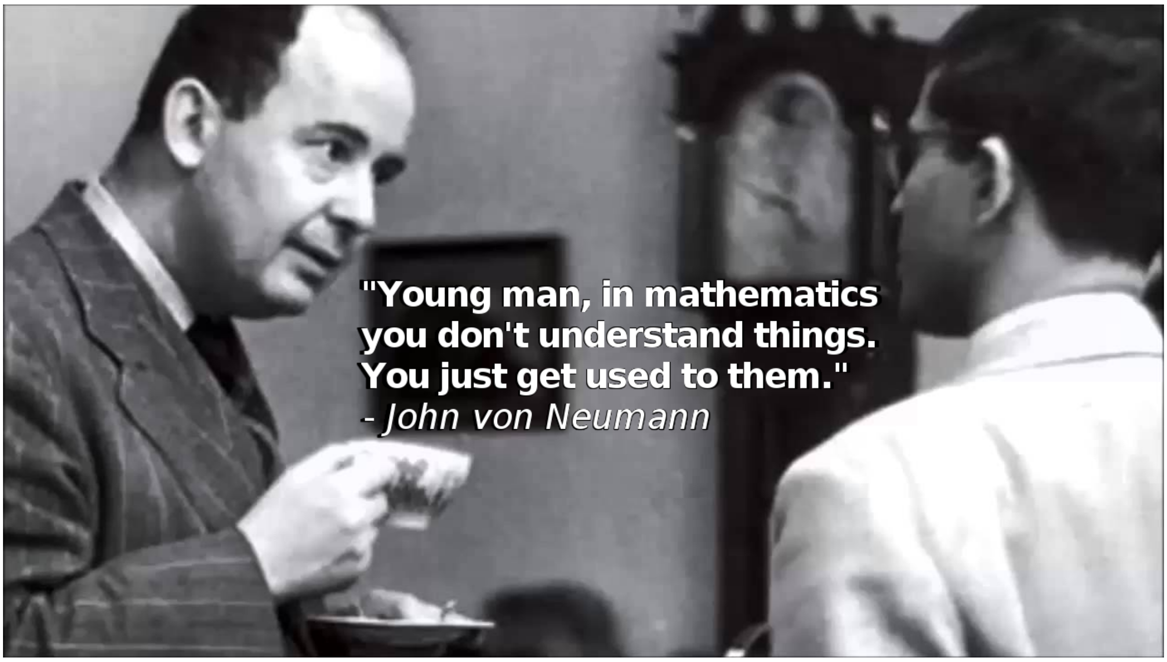
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og alt ordner seg om vi bare slenger opp definisjonen på produkt mellom matriser:

Matriseprodukt

Dersom A og B er matriser med dimensjoner $m \times n$ og $n \times p$, er elementet c_{ij} i produktet $C = AB$ gitt ved skalarproduktet mellom rad nummer i i A og kolonne nummer j i B.

I dette øyeblikk er det antagelig lurt å sitere von Neumann.



[2] Husker du ikke skalarproduktet, er det antagelig lurt å freshe opp dette litt også:
https://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product

Til info: John von Neumann var antagelig den smarteste personen som har levd. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

har kolonner

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

og rader

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon er litt tungt for alle som lærer det første gang. Ta det rolig. Det står forklart mange steder hvordan det funker:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication`
Jeg har kunnet det i tjue år nå, så jeg vet ikke lenger hvordan man skal lære seg det. Jeg husker null og niks av min egen prosess med å lære meg det, og er følgelig ikke kompetent til å lære det bort. Du må kort og godt stange hodet i veggen til veggen gir etter. Bruk von Neumanns triks, øv litt hver dag. Husk å sove nok om natten. [3]

2 Gang sammen matrisene

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

3 Siden et matrise-matriseprodukt består av en haug med skalarprodukter, bør det være klart at man ikke kan gange sammen matriser med vilkårlig dimensjon. Finn en studiekamerat og forklar vedkommende hvilke føringer som gjelder. La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Regn ut AB, BA, A^2, B^2 og $A + B$ eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening.

4 Her er en artig ting. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut både AI og IA.

5 Her er en enda artigere ting. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

[3] Lars Lundheim har noen bra triks her, men jeg husker dem ikke, for jeg trenger dem ikke. Spør ham.

og

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut både AB og BA. Hva tror du dette kan brukes til?

$\boxed{6}$ Hvis du ikke var helt sikker på hva B i forrige oppgave kan brukes til, prøv å gange vektoren

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

inn på høyre side av B og se om du kjenner igjen tallene fra oppgave 3 i forrige økt.

$\boxed{7}$ Matrisemultiplikasjon tilfredsstiller mange regneregler du er vant til, men ikke kommutativitet, unntatt i noen spesialtilfeller. Kommutativitet er at faktorenes orden er likegyldig, altså at

$$ab = ba.$$

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Regn ut AB og BA.

Nå kommer det aller viktigste. De enkleste modelleringsproblemene i anvendelser er ofte **lineære**. Husk matrise-vektorproduktet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er viktig å forstå at dette er en definisjon. Vi ganger sammen matriser og vektorer slik fordi noen har skjønt at det kommer noen godt ut av dette. Nå skal vi se litt på hva det er som kommer ut av det som er så bra.

Superposisjonsprinsippet slik matematikere ser på det

En lineæroperator T er en funksjon som tilfredsstiller

$$T(a\mathbf{x} + a\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle skalarer a og b.

Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæroperator. Her er et par oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beregn:

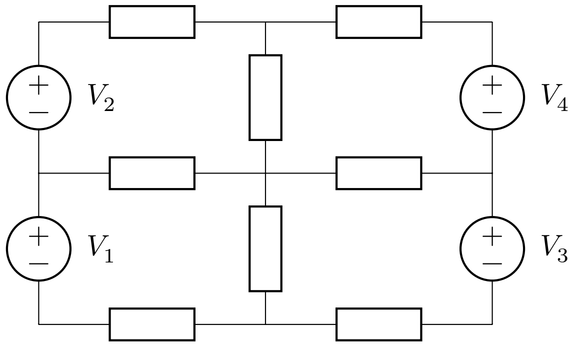
$\boxed{8}$ $A\mathbf{x}$ $\boxed{9}$ $A\mathbf{y}$ $\boxed{10}$ $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ $\boxed{11}$ $A\mathbf{x}+A\mathbf{y}$ $\boxed{12}$ $A(2\mathbf{x}+3\mathbf{y})$ $\boxed{13}$ $2A\mathbf{x}+3A\mathbf{y}$

UKENS ELEKTROTEKNIKK

Siden mange kretselementer er lineære av natur (Ohms lov er for eksempel $v = Ri$), har dette konsekvenser for kretsanalysen.

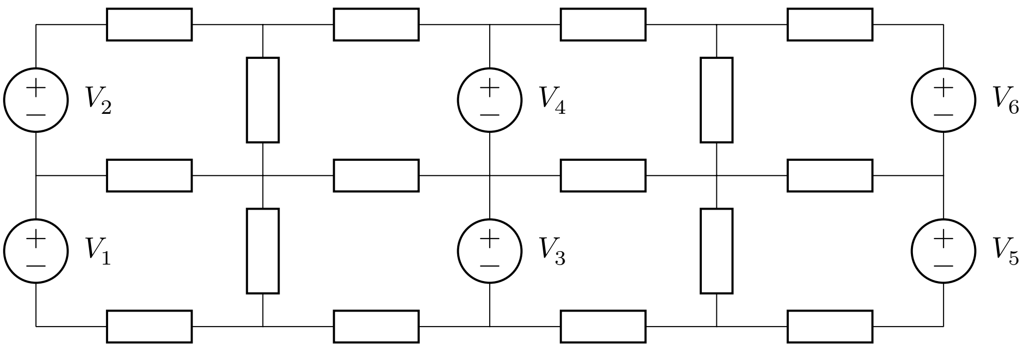
$\boxed{1}$ Sett opp et likningssystem for kretsen under (alle motstandene er 1Ω), og løs når

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

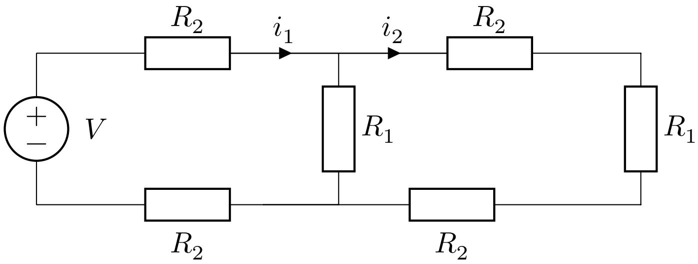


$\boxed{2}$ Matrise-vektorproduktet er en lineæroperator. Forklar hvorfor dette impliserer at du kan basere din løsning av den siste på din løsning av de fire første.

$\boxed{3}$ Finn strømmene i kretsen. (Alle motstandene er fortsatt 1Ω. Her kan python komme godt med, så du slipper å gausseliminere en 8×8-matrise.)

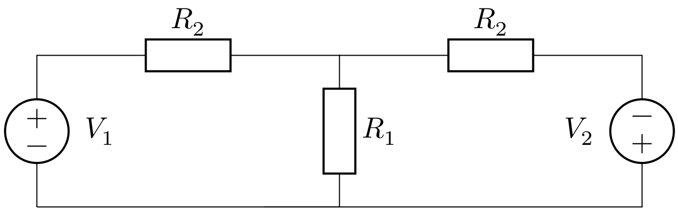


$\boxed{4}$ Kretsen under modellerer en høyttaler eller noe i den dur.



Bruk maskestrømsmetoden til å sette opp et 2×2 lineært likningssystem for i_1 og i_2, og finn disse som funksjon av R_1, R_2 og V.

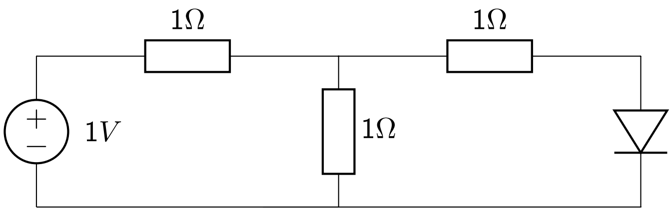
5 En veldig rik, kjip og gjerrig fyr har tatt kontrollen over alle multimeterne på Gløshaugen, og du er dessverre helt nødt til å finne strømmene i følgende krets i forbindelse med en obligatorisk innlevering i TTT4203:



Batteriene som driver spenningskildene er nesten utladede, så spenningen på dem er litt uvisst, men den rike fyren med multimeteret selger deg informasjon om at maskestrømmene i kretsen er henholdsvis 1 A og 2 A når den venstre spenningskilden er på, og motsatt (altså henholdsvis 2A og 1A) når den høyre er på. Han nekter imidlertid å måle strømmene når begge spenningskildene er på, for han er redd for at kretsen skal eksplodere.

Heldigvis er du ganske flink i elektroteknikk, og derfor kan du regne ut strømmene i kretsen når begge spenningskildene er på. Hva blir de? Forklar.

6 Sett diodeparametrene til dine favorittverdier, og finn strømmene i kretsen.



UKENS KJEMI

Vegard Jervell står for ukens kjemi denne uken, og du finner det i kap. 3 her:
`https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/martaoppgaver.pdf`

UKENS NUMERIKK

$\boxed{1}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi skal løse likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med en iterasjonsteknikk som kalles Jacobis iterasjon. La

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

altså diagonalen til A. La $\mathbf{v}_0$ være en tilfeldig startvektor, og sett igang iterasjonen

$$\mathbf{v}_{n+1} = D^{-1}\left(\mathbf{b} - (A - D)\mathbf{v}_n\right).$$

Konvergerer iterasjonen mot korrekt løsning?

$\boxed{2}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Her er en annen iterasjonsteknikk for å løse likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La $\mathbf{v}_0$ være en tilfeldig startvektor, og sett igang iterasjonen

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + 0.01(\mathbf{b} - A\mathbf{v}_n)$$

Denne iterasjonen kalles Richardsoniterasjon.