TMA4101/4106/4111/4121

5 - LINEÆRE LIKNINGSSYSTEMER

Vi skal hoppe litt frem og tilbake mellom differensiallikninger og algebraiske likninger i dette kurset, for mye av den matematiske teorien vi skal lære, kan brukes på begge områder.

$\boxed{1}$ Et annengradspolynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.

Dersom du skjønte hvordan oppgave 1 skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp likningssystemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2a + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

Dette kalles et lineært likningssystem, og studiet av slike systemer kalles lineæralgebra. Realistiske modeller av fysiske problemer hoster gjerne opp med likningssystemer med så mange likninger og ukjente at det ikke er trivielt å regne ut løsningen på rimelig tid. Det er for eksempel ikke noe problem å lage et likningssystem med 10000 likninger og ukjente som laptopen min trenger flere sekunder på å løse, og mange likningssystemer i faktiske anvendelser er mye mye større enn som så. Allikevel:

> If you can reduce a mathematical problem to a problem in linear algebra, you can most likely solve it, provided that you know enough linear algebra.
>
> \- Peter D. Lax

Så vår jobb er altså å lære grunnleggende lineæralgebra, for lineære systemer dukker opp i alle realfag på et eller annet vis.

Hvis du lærte det samme som jeg (født i 1983) på ungdomsskolen, lærte du å løse lineære likningssystemer ved innsettingsmetoden. Det finnes tusenvis av forskjellige teknikker for å løse veldig spesialiserte lineære likningssystemer, men metoden alle universitetskurs begynner med, kalles gausseliminasjon:
https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination

$\boxed{2}$ Regn ut a, b og c i systemet over ved gausseliminasjon.

Gausseliminasjon ble oppfunnet av noen kinesere for omtrent to tusen år siden. Selv om du antagelig ikke skal gausseliminere så veldig mye etter du er ferdig å studere, må man nesten lære denne teknikken, for det er ikke så lett å forstå lineære likningssystemer uten å løse noen lineære likningssystemer. Nå tror jeg vi rett og slett bare skal trene litt.

$\boxed{3}$ Løs likningssystemene:

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=4\\ 3x+4y+5z&=5\\ 4x+5y+7z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1-\ x_2-\ x_3\qquad &=1\\ -x_1+3x_2\qquad -\ x_4&=0\\ -x_1\qquad +3x_3-\ x_4&=0\\ -\ x_2-\ x_3+3x_4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2z+\ iw+\ (5-3i)u&=10\\ 4z+2iw+(10+2i)u&=20+16i\\ 2iz-\ w+\ (4+6i)u&=2+12i \end{aligned}$$

En av de første tingene man gjør når man skal studere lineære likningssystemer, er å gå lei av å skrive pluss og minus, erlik og x_1 og x_2 og slikt. Derfor lager vi oss notasjon som er litt mer minimalistisk. Systemet

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=4\\ 3x+4y+5z&=5\\ 4x+5y+6z&=3 \end{aligned}$$

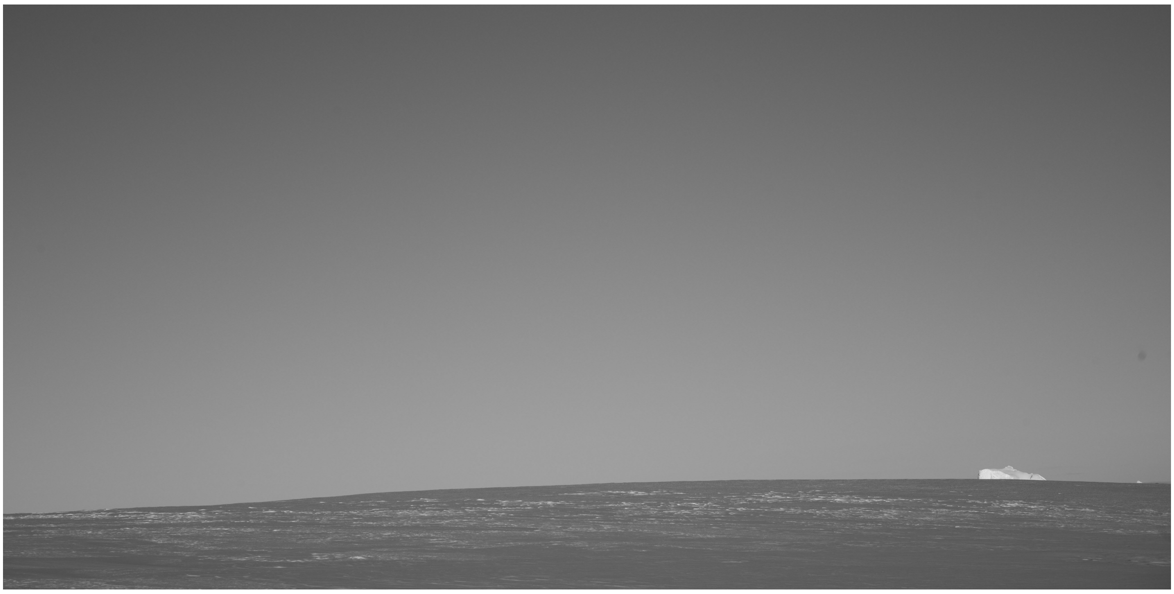
skriver vi kort og godt

$$\begin{array}{ccc|c} 2&3&4&4\\ 3&4&5&5\\ 4&5&7&3 \end{array}$$

Alle mennesker med trening i lineæralgebra skjønner at man kan gjøre all regningen uten å skrive så mye greier.

$\boxed{4}$ Løs likningssystemene og nyt hvor mye mindre skriving det blir:

$$\begin{array}{ccc|c} 2&3&4&4\\ 3&4&5&5\\ 4&5&7&3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 3&-1&-1&0&1\\ -1&3&0&-1&0\\ -1&0&3&-1&0\\ 0&-1&-1&3&0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2&i&5-3i&10\\ 4&2i&10+2i&20+16i\\ 2i&-1&4+6i&2+12i \end{array}$$



Når jeg lærte å løse lineære likningssystemer på skolen i omtrent 1998, ble vi spart for alt det som er gøy. Hvis du nå har skjønt foran og bak på gausseliminasjon, kan vi begynne på det som er gøy.

$\boxed{5}$ Prøv å løse systemene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right] \quad \text{og} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \end{array}\right] \quad \text{og} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right] \quad \text{og} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

For å skjønne hva som skjer i alle disse systemene, må man studere teorien bak lineære likningssystemer. Wikipediasiden om dette er ganske bra:
`https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations`

Første steg på denne reisen er gjerne følgende oppgave.

$\boxed{6}$ Alle punkter (x, y, z) som passer i likningen

$$ax + by + cz = d$$

ligger på ett og samme plan i rommet. (Dette lærte du på skolen.) Bruk dette til å forklare alt som skjedde i oppgave 4, og forklar hvordan du kan se om et når et 3×3-likningssystem har entydig løsning.

Les også litt her:
https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant

og

7 forklar hvorfor disse har entydig løsning:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1+i \end{array}\right.$$

8 Hva med

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right. \text{ og } \left.\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right. \text{ og } \left.\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right. \ ?$$

9 Løs likningssystemene. Når er det entydig løsning?

$$\left.\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \end{array}\right. \quad \text{og} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3 \end{array}\right.$$

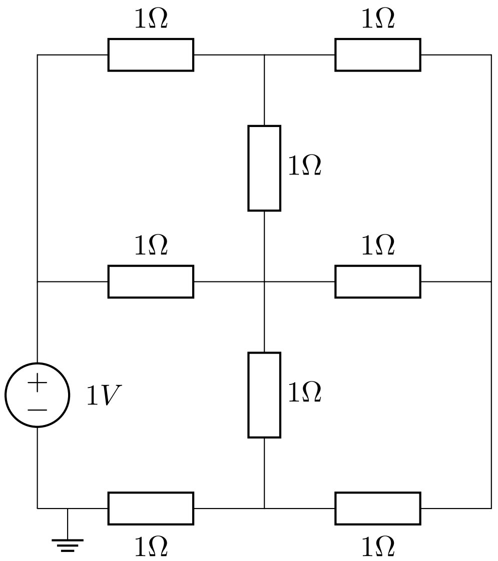
10 Noen ganger kan det være litt pjask å skrive opp alle løsningene. Prøv disse:

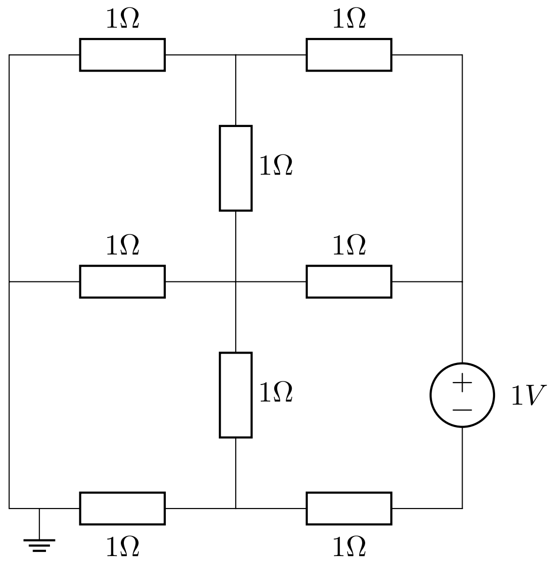
$$\left.\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \text{og} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right.$$

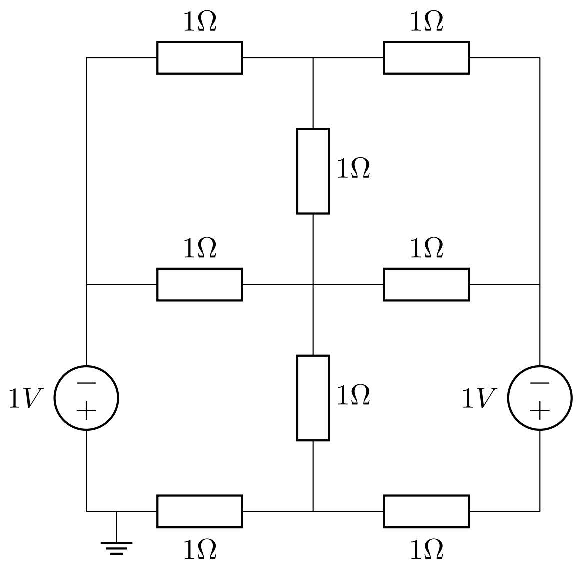
UKENS ELEKTROTEKNIKK

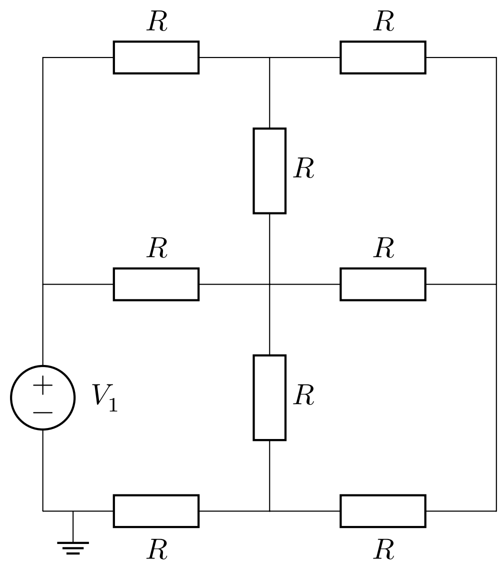
Det finnes systematiske teknikker for å sette opp et lineære likningssystemer for en resistive krets, altså kretser med kun motstander og spennings- eller strømkilder. Nå skal vi se på en av dem. **Maskestrømsmetoden** består i å tenke at de ukjente er sirkulære strømmer som går i bane i hver sløyfe. Det er like mange ukjente som sløyfer i kretsen, og man får korrekt antall likninger ved å summere spenningsfallet rundt hver sløyfe og så bruke Kirchhoffs spenningslov.

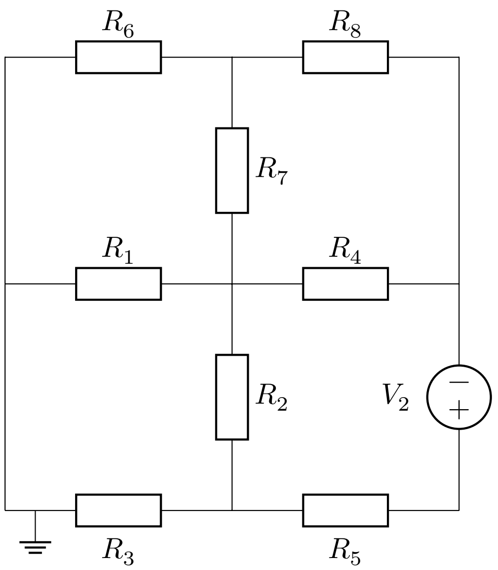
$\boxed{1}$ Søk opp 'mesh current' på internett, og prøv maskestrømsmetoden på kretsene under. Du finner metoden i Nilsson/Riedel kap. 4.4-4.5.
(I de tre siste kretsene er











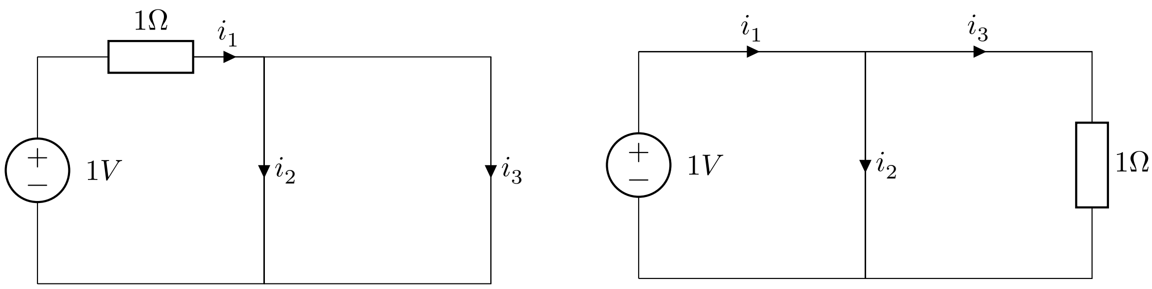
Noen synes for øvrig maskestrømsmetoden er litt shady, for du kan potensielt ha ukjente som ikke kan måles med et multimeter. Noen mennesker liker å måle alt, og tror ikke på noe før de har vært bortpå med multimeteret.

Nodespenningsmetoden er en annen systematisk metode for å sette opp lineære likningssystemer fra et kretsdiagram. Det bli litt flere likninger enn for maskestrømsmetoden, men den kan brukes selv om kretsen ikke er planar, og du kan verifisere at du har regnet riktig ved å måle de ukjente med et multimeter. Nodespenningsmetoden består i å sette opp spenningen i hver node (relativt til jordsymbolet) som ukjent i hver node, og bruke Kirchhoffs strømlov på hver node.

$\boxed{2}$ Prøv nodespenningsmetoden på kretsene over.

$\boxed{3}$ Ta stilling til påstanden: "Nodespenningsmetoden gir alltid flere likninger og ukjente enn maskestrømsmetoden."

$\boxed{4}$ Det er ikke alltid det blir så lett. Prøv å bestemme i_1, i_2 og i_3 i disse kretsene:



UKENS KJEMI

I forrige økt tok vi en kikk på differensiallikningen

$$\frac{d[\mathrm{NO_2}]}{dt} = -k[\mathrm{NO_2}]^2$$

der $k = 0.54$ per mol per sek. Denne beskriver hvor fort reaksjonen

$$2\mathrm{NO_2(g)} \rightarrow 2\mathrm{NO(g)} + \mathrm{O_2(g)}$$

går ved 300 grader celsius. Konstanten k kalles reaksjonshastigheten, og må i de fleste tilfeller bestemmes empirisk. Nå skal vi se på et eksempel.

Kvikksølvklorid $\mathrm{HgCl_2}$ og oksalat $\mathrm{C_2O_4}^{2-}$ reagerer til noe andre greier:

$$2\mathrm{HgCl_2} + \mathrm{C_2O_4}^{2-} \rightarrow 2\mathrm{Cl}^- + 2\mathrm{CO_2} + \mathrm{Hg_2Cl_2}$$

Hvis vi starter med bare kvikksølvklorid og oksalat, er endring i konsentrasjoner gitt ved differensiallikningene

$$\frac{d\left[\mathrm{HgCl_2}\right]}{dt} = -2k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$$

og

$$\frac{d\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]}{dt} = -k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$$

der reaksjonshastigheten k og **reaksjonsordnene** m og n må bestemmes empirisk. Dette eksemplet er hentet fra læreboken i TMT4115, og der står det en tabell med konsentrasjonsmålinger:

$\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]$	$\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]$	$k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$
0.105	0.15	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.105	0.30	$7.1 \cdot 10^{-5}$
0.052	0.30	$3.5 \cdot 10^{-5}$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{aligned}
k \cdot 0.105^m \cdot 0.15^n &= 1.8 \cdot 10^{-5} \\
k \cdot 0.105^m \cdot 0.30^n &= 7.1 \cdot 10^{-5} \\
k \cdot 0.052^m \cdot 0.30^n &= 3.5 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

og tar vi logaritmer til alt sammen, får vi et lineært likningssystem

$$\begin{aligned}
\log k + m \log 0.105 + n \log 0.15 &= \log\left(1.8 \cdot 10^{-5}\right) \\
\log k + m \log 0.105 + n \log 0.30 &= \log\left(7.1 \cdot 10^{-5}\right) \\
\log k + m \log 0.052 + n \log 0.30 &= \log\left(3.5 \cdot 10^{-5}\right)
\end{aligned}$$

for m, n og $\log k$.

$\boxed{1}$ Stygge tall det har. Finn ut hvordan du løser i python.

Her er et annet eksempel på lineære likningssystemer i kjemi. Å balansere en reaksjonslikning er enkelt når den er liten. For eksempel ser vi raskt at

$$a\mathrm{NO} + b\mathrm{O}_2 \to c\mathrm{NO}_2$$

tilfredsstilles av $a = 2$, $b = 1$ og $c = 1$, slik at

$$2\mathrm{NO} + \mathrm{O}_2 \to \mathrm{NO}_2.$$

Dette er et lineæralgebraproblem, fordi vi kan sette opp en likning for hvert atom. Nitrogenet gir likningen

$$a = c$$

mens oksygenet gir likningen

$$a + 2b = 2c.$$

En matematiker ville stilt dette opp slik:

$$\begin{aligned} a - c &= 0 \\ a + 2b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

Nå ser vi at det er to likninger og tre ukjente. Dette reflekterer at problemet matematisk sett har uendelig mange løsninger; vi kunne like gjerne skrevet

$$4\mathrm{NO} + 2\mathrm{O}_2 \to 2\mathrm{NO}_2$$

eller

$$\mathrm{NO} + \frac{1}{2}\mathrm{O}_2 \to \frac{1}{2}\mathrm{NO}_2.$$

$\boxed{2}$ Sett opp likningssystem for

$$a\mathrm{C}_6\mathrm{H}_{14}\mathrm{O}_4 + b\mathrm{O}_2 \to c\mathrm{CO}_2 + d\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

og balanser.

$\boxed{3}$ Hva med

$$a\mathrm{KCrO}_4 + b\mathrm{AgNO}_3 \to c\mathrm{Ag}_2\mathrm{CrO}_4 + d\mathrm{KNO}_3 \quad ?$$

$\boxed{4}$ Man produserer acrylonitril fra propylen, ammoniakk og oksygen slik:

$$a\mathrm{C}_3\mathrm{H}_6 + b\mathrm{NH}_3 + c\mathrm{O}_2 \to d\mathrm{C}_3\mathrm{H}_3\mathrm{N} + e\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

Se eksempel 3.2 i Sigurd Skogestads klassiker om prosessteknikk.

$\boxed{5}$ Vi kan kjøre på systemer av reaksjonslikninger og. Her en prosess for å lage metanol.

$$\begin{aligned} a\mathrm{CO} + b\mathrm{H}_2 &\to c\mathrm{CH}_3\mathrm{OH} \\ d\mathrm{CO}_2 + e\mathrm{H}_2 &\to f\mathrm{CH}_3\mathrm{OH} + g\mathrm{H}_2\mathrm{O} \end{aligned}$$

`https://en.wikipedia.org/wiki/Methanol#Production`

$\boxed{6}$ Eller hva med litt dehydrogenering av etan?

$$\begin{aligned} a\mathrm{C}_2\mathrm{H}_6 &\to b\mathrm{C}_2\mathrm{H}_4 + c\mathrm{H}_2 \\ d\mathrm{C}_2\mathrm{H}_6 + e\mathrm{H}_2 &\to f\mathrm{CH}_4 \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Eller kanskje litt aluminiumproduksjon fra aluminiumoksid:

$$a\mathrm{Al_2O_3} + b\mathrm{C} \to c\mathrm{Al} + d\mathrm{CO_2}$$

Takk til Svein Sunde og Sigurd Skogestad for eksempler.