4 - FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER

Differensiallikninger modellerer deterministiske fysiske prosesser, og løsningen er en funksjon som beskriver prosessen. De enkleste differensiallikningene modellerer prosesser som foregår i tid. Det er derfor vanlig å bruke t som uavhengig variabel. Vi bruker x eller y eller z for den ukjente funksjonen, og en spesiell notasjon for derivert, oppfunnet av Isaac Newton:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Den beste og vanligste strategien for å lære seg differensiallikninger, er å begynne med de enkleste, skjønne hva de modellerer, og hvilke funksjoner som løser dem.

E. Coli

Bakterier og ølgjær og slikt deler seg ved såkalt avsnøring. Dette betyr at de deler seg i to fra tid til annen. *E. Coli* deler seg omtrent hvert 20. minutt ved 37 grader celsius. [1] [2] [3] Denne ideen er tilstrekkelig til å lage en modell. Dersom bakteriene deler seg i to hvert 20. minutt, er vekstraten proporsjonal med antall bakterier,[4] slik at

$$\dot{x} = ax$$

der a er en konstant kalt proporsjonalitetskonstanten. Dette er den aller enkleste differensiallikningen, og den kan løses på mange forskjellige måter. Vi matematikere synes det er ryddigst å bytte fortegn på a og sortere likningen slik at alle ukjente står på venstre side:

$$\dot{x} + ax = 0$$

$\boxed{1}$ Finn løsningen.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fission_(biology)#Speed_of_FtsZ-dependent_Fission
[2] https://snl.no/celledeling
[3] https://www.mn.uio.no/ibv/tjenester/kunnskap/plantefys/leksikon/g/gjaer.html
[4] Bare se på denne og tell: https://www.youtube.com/watch?v=gEwzDydciWc

Den enkleste måten å løse en så enkel differensiallikning på, er nok å skyte fra hoften og ta en kvalifisert gjetning på at løsningen er på formen

$$x(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Det er enkelt å teste om hypotesen er riktig. Man setter funksjonen inn i likningen

$$A\lambda e^{\lambda t} + Aae^{\lambda t} = 0$$

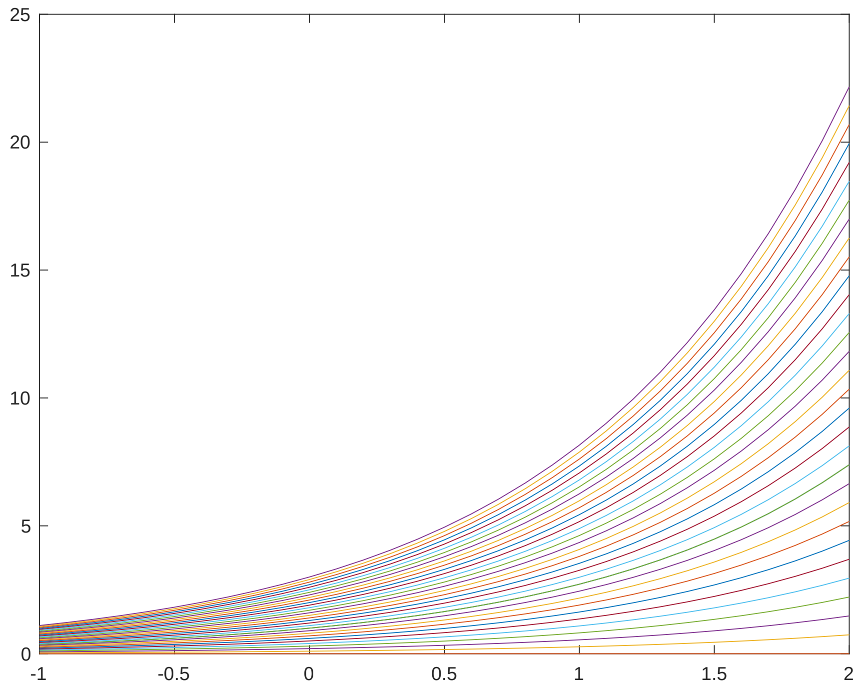
og observerer at $A \neq 0$ (siden dette er en ganske uinteressant løsning) og at $e^{\lambda t} \neq 0$ (vi vet jo foran og bak på eksponensialfunksjonen), og at vi derfor kan dele disse ut og få

$$\lambda + a = 0$$

som kalles den karakteristiske likningen. Denne har løsning $\lambda = -a$, og hvis vi nå har gjort alt riktig, er konklusjonen at

$$x(t) = Ae^{-at}$$

er en løsning av likningen uansett hva A er. Vi har altså en hel familie av løsninger. Her plot for $a = -1$ og tredve forskjellige verdier av A:



Dersom man har en petriskål full av bakterier og ønsker å gjøre en prediksjon på hvor stor kulturen er etter så og så lang tid, må vi starte med en kultur på en gitt størrelse. I matematikk kalles dette en initialbetingelse, og en særdeles populær en er

$$x(0) = 1.$$

Kombinasjonen av en differensiallikning og en initialbetingelse kalles et initialverdiproblem.

$\boxed{2}$ Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{x} + x = 0 \qquad x(0) = 2$$

Måten man gjør dette på, er å si at

$$x(t) = Ae^{-at}$$

og kreve

$$2 = x(0) = A$$

slik at

$$x(t) = 2e^{-at}.$$

Da jeg var student, syntes jeg dette var en irriterende løsningsmetode, for jeg skjønte ikke hvordan man kunne være sikker på at det ikke fantes noen andre løsninger. Det er fordi jeg ikke kjente til følgende resonnement. Anta at du har en annen løsning y som tilfredsstiller det samme initialverdiproblemet. Dersom vi deriverer $e^{at}y(t)$, får vi

$$\frac{d}{dt}e^{at}y(t) = ae^{at}y(t) + e^{at}\dot{y}(t) = e^{at}\left(ay(t) + \dot{y}(t)\right) = 0$$

slik at $e^{at}y(t)$ en konstant funksjon:

$$e^{at}y(t) = K$$

Altså er

$$y(t) = Ke^{-at}.$$

Siden $y(0) = x_0$, må $K = x_0$, og vi ser nå at $y(t) = x_0 e^{-at} = x(t)$. Med andre ord kan det ikke finnes en annen funksjon som tilfredsstiller det samme initialverdiproblemet, og vi sier at løsningen er entydig. For å oppsummere:

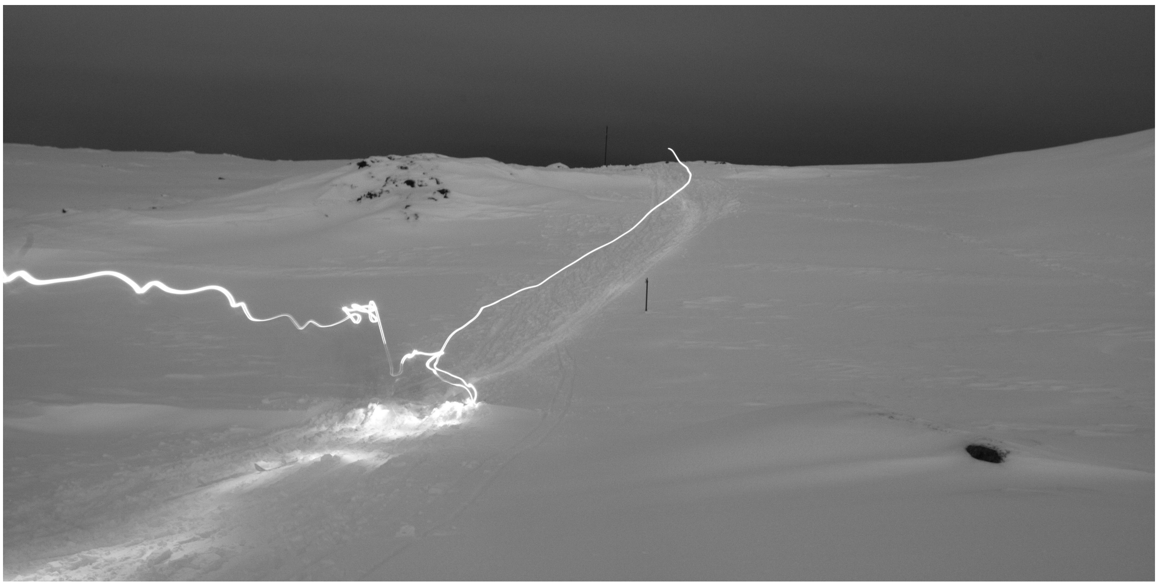
Løsningen til

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0$$

er

$$x(t) = x_0 e^{-at}.$$

Dette er faktisk den eneste løsningen.



$\boxed{3}$ Som sagt deler *E. Coli* seg omtrent hvert 20. minutt ved vanlig kroppstemperatur, og vi vet at

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = x_0$$

er en enkel modell for veksten. En bestemt verdi $x(t)$ kan du tenke på som totalt antall bakterier i et bestemt volum eller totalt antall bakterier per liter (altså konsentrasjon) eller arealet bakteriene dekker i en petriskål eller noe annet i den dur. Alt er lov så lenge det er korrekt, og du er konsistent. Dersom x_0 er totalt antall bakterier, er også $x(t)$ det.

Verdien til a er litt mer subtil. Den avhenger av om vi måler t i timer, minutter eller sekunder. Finn a for *E. Coli* dersom t måles i

- timer
- minutter
- sekunder
- 20-minutters inkrementer (denne blir spesielt pen)

En død katt

Dersom en ikke-matematiker skal ha nytte av differensiallikninger, er det nok lurt å kjenne til alle de grunnleggende fysiske, kjemiske og biologiske modellene som resulterer i differensiallikninger. Styrken til differensiallikninger, er at

> En og samme differensiallikning modellerer vidt forskjellige fysiske prosesser.

Her er en helt annen fysisk situasjon som modelleres av akkurat den samme likningen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_dating`
Første Mosebok postulerer at jorden er omtrent seks tusen år gammel. Hvis dette er sant, så er det noe galt med vår forståelse av grunnstoffet karbon.

Karbon forekommer i tre isotoper som kalles C-12, C-13 og C-14. Alle har en atomkjerne som inneholder seks protoner, men kjernen kan i tillegg inneholde seks, syv eller åtte nøytroner. C-14 er et ustabilt isotop, og halveringstiden er på omtrent 5700 år, men andelen C-14 i atmosfæren ligger allikevel (på grunn av kosmisk stråling og et par atombombeprøvesprengninger) stabilt på omtrent ett atom per 10^{12}.

Siden du puster, utveksler du hele tiden karbon med atmosfæren, og derfor er andelen C-14 i kroppen din og i atmosfæren omtrent den samme. Når du dør blir du avskåret fra denne utvekslingen, og etter 5700 år vil C-14-andelen i kroppen din være omtrent halvert. Siden det finnes fossiler av levende vesener som har vesentlig lavere C-14-andel enn femti prosent, er jorden pent nødt til å være mye eldre enn 6000 år, med mindre alt er en konspirasjon og noen har plantet alle disse fossilene her for å lure oss. [5]

Med andre ord: om du tror at jorden er 6000 år gammel, kan du ikke samtidig tro på kjernefysikk. Du er pent nødt til å velge en av dem.

$\boxed{4}$ En død *Felis silvestris lybica* inneholder omtrent en tiendedel av min C-14-konsentrasjon. Jeg lever ennå. Finn ut omtrent når dyret avgikk med døden. (*Felis silvestris lybica* er den ancestrale huskatten: `https://en.wikipedia.org/wiki/African_wildcat`)

[5] Se også `https://snl.no/dendrokronologi` og `https://www.nature.com/articles/s41586-021-03972-8`

Alt tar slutt før eller siden

Som David Attenborough i 2013 uttalte under et foredrag i The Royal Geographical Society:

"Anyone who thinks that you can have infinite growth in a finite environment is either a madman or an economist."[6]

Dyr som formerer seg kan sjelden fortsette med det uten å før eller siden oppleve noen som helst form for begrensning i veksten. De må jo ha mat. Den enkleste utvidelsen for å inkorporere dette i modellen vi startet med, er å erstatte a med en positiv funksjon som har et nullpunkt i den bestanden x som maksimalt kan opprettholdes på området. Hvis vi gjør det enkelt og sier at denne funksjonen skal være en rett linje, får vi den **logistiske likningen**

$$\dot{x} = a(b - x)x$$

der b er en konstant som kalles bærekapasiteten, og c er et tall som forteller noe om vekstraten. Hvis du ser nøye på likningen, vil du nok se at når x stiger mot b, vil vekstraten synke mot null, slik at dyrene formerer seg saktere og saktere.

$\boxed{5}$ Løs med separasjon, slik som i R2. Gjør du det riktig, bør du komme frem til at

$$x(t) = \frac{be^{abt}}{C + e^{abt}}$$

der C er en ubestemt konstant. Plot i python for forskjellige C, a og b.

Også her er det fornuftig med en initialbetingelse for å bestemme integrasjonskonstanten C, men formelen er mer grisete.

$\boxed{6}$ Vis at

$$C = \frac{b - x(0)}{x(0)}$$

Hva skjer om du setter initialkrav $x(0) = 0$ eller $x(0) = b$?

[6] Sitatets opprinnelse er noe usikker.

En kokt elgtunge

Dersom vi nå bare kompliserer E. Coli-radiokarbondateringsdifferensiallikningen litt, men på en annen måte enn for logistisk vekst, får vi en modell for noe helt annet, nemlig Newtons avkjølingslov:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling`
Denne sier at temperaturen T i en kokt elgtunge som settes inn i kjøleskapet (eller ut av kjøleskapet, eller inn i stekeovnen osv), følger initialverdiproblemet

$$\dot{T}(t) + \alpha\,(T(t) - T_K) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

der t er tiden, T_0 er temperaturen til elgtungen i det den settes inn i kjøleskapet, T_k er temperaturen i kjøleskapet, og α er en konstant som avhenger av varmeflyten mellom elgtungen og omgivelsene. Nå ble plutselig notasjonen endret og fysikken endret, og likningen ser mer komplisert ut. Men den er ikke egentlig det. Det er lurt å holde tungen bent i munnen, og sortere alt slik vi pleier, og se at dette er en likning på formen

$$\dot{x} + ax = k$$

der k er en konstant. Dette er gunstig for matematikkens del, for det er så lett å verifisere at løsningen må være

$$x(t) = Ae^{-at} + \frac{k}{a}$$

og at dette er den eneste løsningen.

$\boxed{7}$ Vis at løsningen er entydig. Du kan bruke det samme trikset som over, litt modifisert.

Vi skriver Newtons avkjølingslov slik vi gjør for for at fysikken skal komme tydelig fram. For det første er den ukjente T og ikke x for å minne om at det er temperatur, og for det andre skriver vi likningen slik at det er tydelig at endringsraten i temperaturen er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom temperaturen i elgtungen ($T(t)$) og Kjøleskapet (T_K), altså

$$T(t) - T_K.$$

$\boxed{8}$ Dobbeltsjekk at løsningen er

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}.$$

(Du kan enten løse likningen, for eksempel ved integrerende faktor, eller bare sette uttrykket inn og sjekke at det passer i likningen.)

$\boxed{9}$ En elgtunge med temperatur 6°C settes på kjøkkenbenken. Etter to timer er temperaturen steget til 13°C, og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Finn α og lag et plot av temperaturen.

$\boxed{10}$ Da temperaturen var 15°C, ble elgtungen satt inn igjen i kjøleskapet. En time senere var temperaturen i tungen sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

En kokt krystall

Så dette var litt om de fysiske modellene. Det er fornuftig å ha de meste grunnleggende modellene i ryggraden for det er disse man bygger på når man lager mer kompliserte modeller, og levende organismer HAR en tendens til å formere seg eksponensielt dersom de har nok mat. [7] Vi skal studere flere fysiske modeller, men akkurat nå skal vi fleske til og gjøre elgtungemodellen så komplisert at penn og papir ikke lenger er tilstrekkelig for å analysere den.

Hva om α ikke er et tall, men en funksjon av T? Proporsjonalitetskonstanten α forteller oss noe om hvor raskt varmen strømmer mellom elgtungen og omgivelsene, og det er en rimelig antagelse at α er avhengig av elgtungens varmekapasitet. Jeg vet ikke om noen har studert varmekapasiteten til en kokt elgtunge, men om vi kjøler ned en krystall, kan vi forvente at varmekapasiteten er sterkt temperaturavhengig:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_solid`

Hvis vi nå gjør det enkelt, og antar at

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2}\frac{e^{1/T}}{(e^{1/T}-1)^2}$$

(her er det en haug med fysiske konstanter som er satt til en av hensyn til din kognitive last) blir Newtons avkjølingslov

$$\dot{T} + \frac{1}{T^2}\frac{e^{1/T}}{(e^{1/T}-1)^2}(T - T_k) = 0 \quad T(0) = T_0.$$

Lykke til med å løse denne med penn og papir. Hva gjør vi nå?

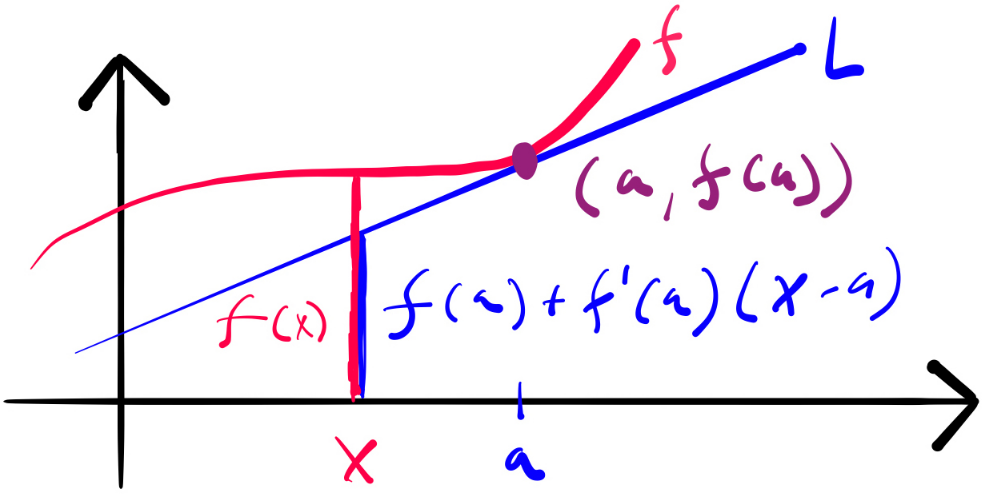
$\boxed{11}$ Nå er det på tide å skjønne hvordan Eulers metode virker. Dette er nok et kvantesprang for mange, men det er en standardmetode. Du finner beskrivelsen av metoden i Adams, Kreyszig, Wikipedia, Khan Academy, Organic Chemistry Tutor, det mørke internettet, i alle bøker som noensinne er skrevet, og et utall andre steder. Prøv å finne ut av det.

[7] `https://peterturchin.com/PDF/AoD_Chapter1.pdf`

Det er noe som kalles lineærapproksimasjon. Den ser slik ut:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = L(x)$$

og du kan lese kap. 4.9 i Adams eller her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_approximation`
eller se på denne figuren:



Vel vel. La oss anta at du har et initialverdiproblem

$$\dot{x} = g(x) \quad x(0) = x_0$$

du ikke aner hvordan du skal løse med penn og papir. Vel, du vet ihvertfall hva $x(0)$ er. Det er da noe. Men du vet faktisk mer enn det.

$\boxed{12}$ Du vet også hva $\dot{x}(0)$ er. Hva er det?

Helt riktig:

$$\dot{x}(0) = g(x(0)) = g(x_0)$$

Vi kjenner altså stigningstallet til løsningen i starttidspunktet. Dette er fordi vi kjenner initialbetingelsen, og da forteller differensiallikningen hvilken stigning løsningen starter med. Det betyr at dersom du ønsker en approksimasjon til løsningen litt etter starttidspunktet, kan du bruke lineærapproksimasjon på $x(t)$:

$$x(t) \approx x_0 + \dot{x}(0)t = x_0 + g(x_0)t$$

Nå er det nok på tide å innføre litt notasjon. La oss velge et lite tidsinkrement h, og sette opp tilnærminger til løsningen slik:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx x(h) \\ x_2 &\approx x(2h) \\ x_3 &\approx x(3h) \end{aligned}$$

og så videre. Eulers eksplisitte metode baserer seg på å bruke lineærapproksimasjon for å beregne approksimasjoner slik:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hg(x_0) \quad (= x(0) + h\dot{x}(0)) \\ x_2 &= x_1 + hg(x_1) \\ x_3 &= x_2 + hg(x_2) \end{aligned}$$

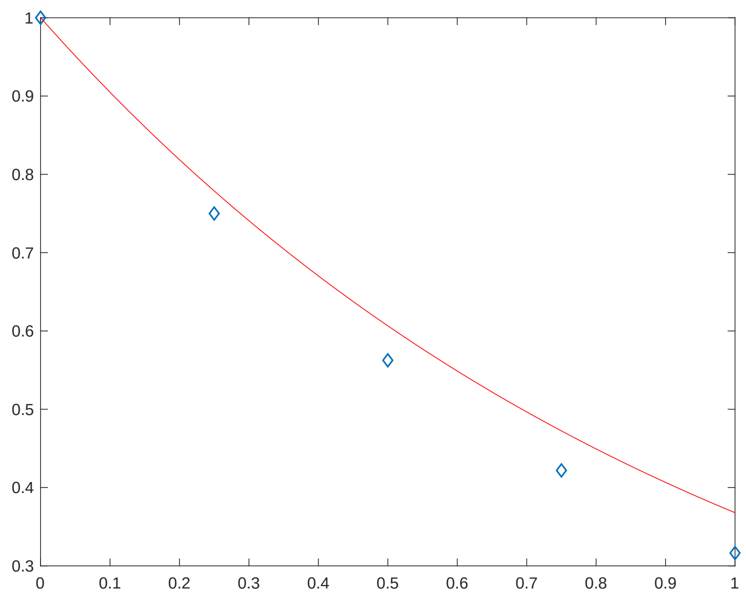
og så videre. Man tar altså approksimasjonen på et tidspunkt og lineærapproksimerer herfra for å finne approksimasjonen på neste tidspunkt i rekken. Hvis du liker rekursjoner, kan du skrive det slik:

$$x_{n+1} = x_n + hg(x_n)$$

Jo mindre h, desto bedre funker det, men det tar lengre tid for datamaskinen å regne på alt sammen. Punktmengden

$$\{0, h, 2h, 3h, \cdots\}$$

kalles **gitteret**. Her er et illustrasjonsplot av en analytisk løsning (rød linje) og en numerisk approksimasjon (diamanter):



La oss prøve dette ut.

$\boxed{13}$ La oss sette $\alpha = 1$ og $T_k = 2$ i Newtons avkjølingslov, slik at det blir enkelt:

$$\dot{T} + T - 2 = 0$$

Skriv dette om til formen $\dot{T} = g(T)$ og løs numerisk med initialkrav $T(0) = \frac{1}{10}$. Lag et plott av løsningen.

$\boxed{14}$ La oss nå komplisere det litt, og innføre

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

istedet for $\alpha = 1$. Løs numerisk med initialkrav $T(0) = \frac{1}{10}$, og plott denne løsningen i samme figur som løsningen fra forrige oppgave.

Det finnes mange andre metoder. Nå kan du gå et eller annet sted og lese om Eulers implisitte metode:

$$x_{n+1} = x_n + hg(x_{n+1})$$

og trapesmetoden:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{g(x_n) + g(x_{n+1})}{2}\right)$$

og midtpunktmetoden:

$$x_{n+1} = x_n + hg\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

og Heuns metode:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{g(x_n) + g\left(x_n + hg(x_n)\right)}{2}\right)$$

$\boxed{15}$ Løs initialverdiproblemet

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \quad T(0) = \frac{1}{10}$$

med alle disse metodene, og sammenlikne disse med den analytiske løsningen

$$T(t) = 2 - \frac{19}{10}e^{-t}$$

$\boxed{16}$ Hvis du er dreven i programmering, kan du prøve

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

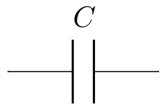
istedet for $\alpha = 1$, med alle metodene. (De implisitte metodene trenger en numerisk likningsløser i hvert tidssteg.)

$\boxed{17}$ Løs logistisk likning med alle metodene og sammenlikne med analytisk løsning.

Hvis du vil har flere oppgaver, finnes det mange i kap. 1 i Kreyszig. Hvis du vil ha vanskeligere oppgaver, kan du se i Kap. 1 i Schaeffer og Cain.

UKENS ELEKTROTEKNIKK

En kondensator

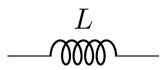


to plater som står inntil hverandre i en krets. Kretsen kan fylle på elektroner på den ene platen og tappe dem ut fra den andre platen, slik at det oppstår en spenning mellom platene. Energi blir ladet opp, og denne kan bli sluppet løs igjen senere; det kommer an på kretsen. Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn i den:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int^{t} i(s)\, ds$$

Proporsjonalitetskonstanten C måles i coloumb per volt, og avhenger av størrelsen på kondensatorplatene, hva de er laget av, hvor langt de står fra hverandre og så videre.

En spole



er en strømledning som er lagt i spiral. Trafoen oppe i gaten er full av disse, og norsk industri hadde vært utenkelig uten spoler. Man bruker dem for eksempel når man vil ha en turbin i et vannkraftverk til å generere elektrisk strøm. Spolen fungerer sånn at når strømmen gjennom spolen endres, oppstår et magnetfelt som skaper en spenning som prøver å motvirke endringen i strømmen, og elementloven er:

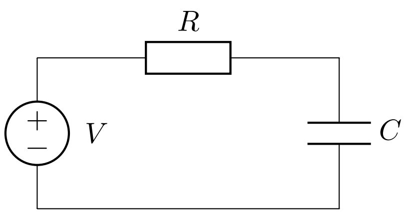
$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

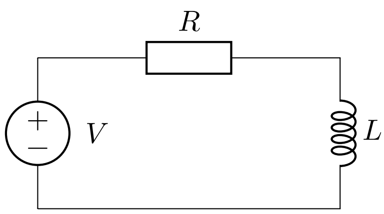
Denne er mer komplisert å forstå enn kondensatoren, og følger av Faradays lov

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E}\cdot ds = -\frac{d}{dt}\iint_{D} \mathbf{B}\cdot dS$$

som er en av Maxwells fire berømte likninger. Vi må vente til tredje semester med å se på disse, for det trengs flervariabel kalkulus (integrasjon og derivasjon i flere dimensjoner) for å i det hele tatt skjønne hva loven sier.

Den helt klart viktigste anvendelsen av differensiallikninger i elektroteknikkens verden, er kanskje RC- og RL-kretser:

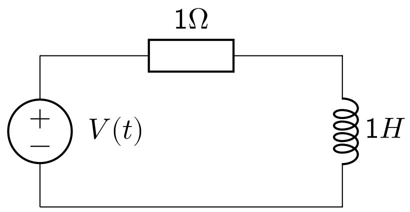




$\boxed{1}$ Sett opp differensiallikninger for RC- og RL-kretsen.
(Hint: bruk Kirchhoffs spenningslov og elementlovene.)

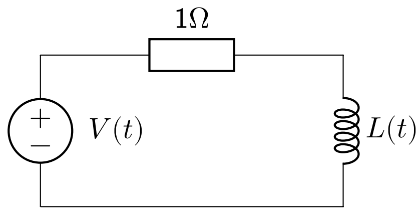
Hvis du fikk til forrige oppgave, vil du se at både RC- og RL-kretsen er styrt av nøyaktig samme differensiallikning som Newtons avkjølingslov og E. Coli og radioaktiv nedbrytning og alt det der, til tross for at virkemåten for spole og kondensator er helt forskjellig.

$\boxed{2}$ Finn strømmen i kretsen når $V(t) = k$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0$.

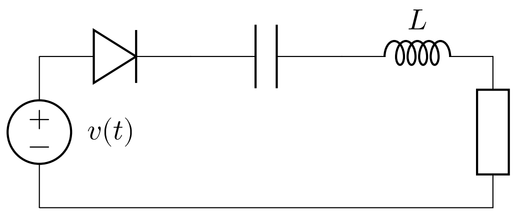


$\boxed{3}$ Finn strømmen i kretsen over når $V(t) = \cos t$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0$.

$\boxed{4}$ I kretsen under er det en spole med variabel induktans:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor#Variable_inductor`
Spenningskilden er også variabel. Laurentius Lie dreier på knappen til spolen slik at $L(t) = t$ og på spenningskilden slik at $V(t) = t$. Finn strømmen i kretsen, gitt at det ikke går strøm ved $t = 1$.



$\boxed{5}$ Denne da?



UKENS KJEMI

Det finnes flere isotoper av hydrogen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_hydrogen`

Tritium har halveringstid på 12 år og 3 måneder. I kjemi er det vanlig å skrive

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

der $[A]$ er konsentrasjonen av stoffet som halveres.

$\boxed{1}$ Finn k for tritium, og plot en typisk løsningskurve.

Kjemiske reaksjoner kan gå fort og langsomt, og det finnes differensiallikninger som modellerer reaksjonshastighet. Reaksjonshastighet er viktig, for noen reaksjoner bør helst gå fort (for eksempel

forbrenning) mens andre bør gå sakte (for eksempel korrosjon). Atmosfæren består av 78 prosent nitrogen og 21 prosent oksygen. Ved vanlig trykk og temperatur reagerer ikke disse, men ved for eksempel lynnedslag eller forbrenning i dieselmotorer eller skogbrann blir det mer fart i dem, og så kombinerer de til nitrogenoksider ($\mathrm{NO_x}$). Det er disse som gir Los Angeles sin berømte smog:
`https://www.latimes.com/local/la-me-air-pollution-0428-pictures-photogallery.html`

I atmosfæren er det mange forskjellige reaksjoner mellom nitrogenoksider og oksygen. En av dem er at nitrogendioksid splitter i nitrogenmonoksid og oksygen:

$$2\mathrm{NO_2(g)} \to 2\mathrm{NO(g)} + \mathrm{O_2(g)}.$$

I noen tilfeller av denne går visst reaksjonsratene som kvadratet av konsentrasjonene

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

der **reaksjonshastigheten** k er en empirisk konstant som avhenger av trykk og temperatur og de støkiometriske koeffisientene og så videre.

$\boxed{2}$ Det ryktes på internett at $k = 0.54$ per mol per sek for reaksjonen over ved 300 grader celsius. Løs likningen

$$\frac{d[\mathrm{NO_2}]}{dt} = -k[\mathrm{NO_2}]^2.$$

analytisk og numerisk og plot begge i samme graf.

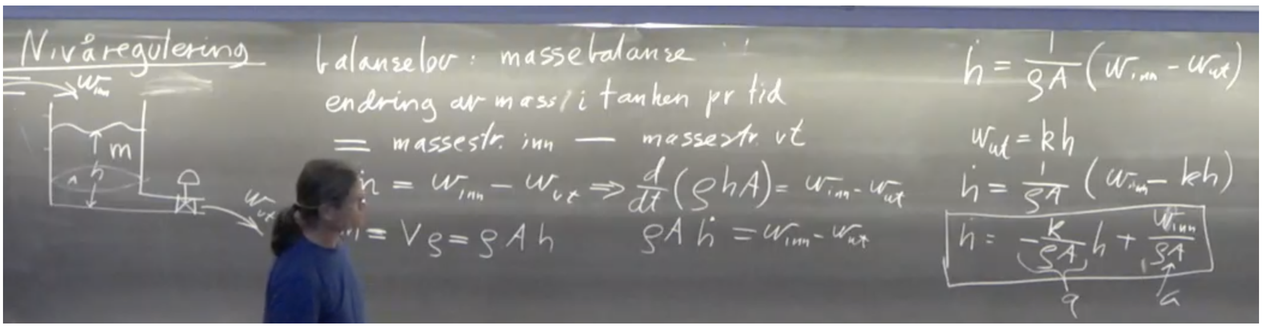
UKENS REGULERINGSTEKNIKK

Dette er jo på mange måter kyb-uken. Kybernetikere driver stort sett bare med ordinære differensiallikninger. Idag er det slik at stort sett alle anvendelser som involverer differensiallikninger også involverer numerisk løsning av differensiallikninger. Det finnes haugevis av numeriske metoder for differensiallikninger, og i Simulink kan du i skrivende stund velge mellom en ganske lang liste av disse; mange flere enn de som er nevnt i denne teksten. Forskjellige numeriske metoder for differensiallikninger fungerer forskjellig, og av og til må man vite noe om virkemåten for å velge riktig.

Til tross for dette er det lurt å løse noen differensiallikninger med penn og papir for å bygge intuisjon. Flere av likningene denne uken har vært på formen

$$\dot{x} = ax + b$$

slik som i kyb intro. La oss se på en klassiker, strømning i tank.



Gravdahls strømningsproblem handler om en tank med sagflis som fylles opp i den ene enden og tømmes i den andre, og leder til en differensiallikning på formen

$$\rho A\dot{h} = -kh + w$$

der ρ er sagflisens tetthet, A er arealet i bånn av tanken, og w er en gitt innstrømning. Sagflishøyden h er den ukjente.

$\boxed{1}$ Dersom w er konstant, er likningen separabel. Du kan også bruke integrerende faktor, eller bare gjette riktig løsning hvis du har nok erfaring. Løs i vei.

$\boxed{2}$ Dersom w er en funksjon av t er det nok best å bruke integrerende faktor. Prøv et par forskjellige, for eksempel $w(t) = \cos t$, $w(t) = 1 - t$ og $w(t) = e^{-t}$.

Nå er det lurt å lese litt i kap. 1 i Kreyszig eller Kap. 1 i Schaeffer og Cain. I disse bøkene står det mange eksempler på differensiallikninger. La oss ta fallskjermhopperen. Dersom en fallskjermhopper påvirkes av gravitasjon og luftmotstand (denne er ofte en kvadratisk funksjon av hastighet), vil farten hennes følge likningen

$$\dot{v} = 1 - v^2$$

der alle fysiske konstanter er satt til en bare for enkelhets skyld.

$\boxed{3}$ Bruk Newtons andre lov og antagelsene om gravitasjon og luftmotstand til å utlede likningen, og løs. (Du må sette noen ymse konstanter til 1 for å få likningen så enkel, men det går bra. Hva slags benevning man har på aksene, kan man stort sett velge fritt.)

En annen klassiker er van der Pols likning

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Denne ble først studert av Balthasar van der Pol i forbindelse med et arbeid på radiorør i Phillips på 1920-tallet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator`
men den er også relatert til nevronavfyringen i hjertet ditt:
`https://en.wikipedia.org/wiki/FitzHugh-Nagumo_model` og det er visst noen som har brukt den til å modellere kollisjoner mellom kontinentalplater og noe greier i stemmebånd og andre ting. Van der Pol skal vi se igjen mange ganger kommende studieår, og du har allerede simulert den i Øving 1 i TTK4100. Nå skal vi gjøre det fra scratch, men da må vi lære et triks.

$\boxed{4}$ Lag noen nye variable $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$, (eller $y = x$ og $z = \dot{x}$ om du synes indeksering er litt stress) og skriv om til et system av to differensiallikninger. Fasiten står i Øving 1.

Numeriske metoder for systemer av to differensiallikninger er bare å skrive opp, det blir ganske likt som for en differensiallikning. Dersom vi har et system av differensiallikninger med initialkrav

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z) \qquad y(0) = x_0 \\ \dot{z} &= g(y, z) \qquad z(0) = y_0 \end{aligned}$$

blir Eulers eksplisitte metode

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= z_n + hg(y_n, z_n) \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Kjør Euler eksplisitt på van der Pol. Prøv forskjellige verdier for y_0, z_0 og μ. (Det vanligste er å plotte y mot z. Det kalles **faseplott**. Sjekk wikipediaartikkelen om van der Pol for å se om du har korrekt plot.)

For å illustrere dette med numeriske metoder, kan vi introdusere symplektisk Euler:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_n + hf(y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= y_n + hg(y_{n+1}, z_n) \end{aligned}$$

Denne er så lik på eksplisitt Euler at man må se nøye på den for å se forskjellen, men oppfører seg helt forskjellig.

$\boxed{6}$ Prøv eksplisitt og symplektisk Euler på van der Pol og se om du ser noen forskjell.

Til slutt: I reguleringsteknikk sorterer man de ukjente på en litt annen måte enn en matematiker ville gjort. Dette har å gjøre med at man ønsker å styre systemer, og da er avstanden u mellom x og den ønskede verdien av interesse. Jeg kan ikke dette greiene helt ennå, men skal skrive det ned når jeg har fått kontroll på det. Se kap. 2 i Gravdahls kompendium.

UKENS NØTT

Det er ikke alltid at løsningen til en differensiallikning er entydig.

$\boxed{1}$ Initialverdiproblemet

$$\dot{x} - \sqrt{x} = 0 \qquad x(0) = 0$$

har flere løsninger. Finn to av dem.

LITT REPETISJON AV R2

Dersom du ikke husker helt hvordan man løser alle disse likningene med penn og papir, kommer det et lite krasjkurs her. En differensiallikning kalles separabel dersom den kan skrives på formen

$$\dot{x} = g(t)f(x)$$

eller eventuelt

$$\dot{x} = \frac{g(t)}{f(x)}$$

Det spiller ingen rolle hvilken man foretrekker. Vi løser separable differensiallikninger ved å gange opp med f og integrere begge sider med hensyn på t:

$$\int f(x)\dot{x}\, dt = \int g(t)\, dt$$

Dersom integralene lar seg løse og man ikke gjør noe dumt på veien, vil metoden produsere korrekt løsning. La oss trene litt på dette.

$\boxed{1}$ Vis at likningen

$$\dot{x} + ax = 0$$

er separabel, og utled uttrykket for løsningen.

$\boxed{2}$ Fallskjermlikningen

$$\dot{v} = 1 - v^2$$

er en separabel likning som modellerer farten til en fallskjermhopper. Løs likningen med forskjellige initialkrav, plott løsningene oppå hverandre, og forklar hva som skjer.

$\boxed{3}$ Løs den logistiske likningen med initialkrav $x(0) = \frac{1}{5}$.

Likningen

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)$$

løses med å gange med integrerende faktor. Dette lærte du på skolen, og husker du det ikke, kan du slå opp i kap. 7.9 i Adams.

$\boxed{4}$ Løs Newtons varmeproblem

$$\dot{T}(t) + \alpha\,(T(t) - T_K) = 0 \qquad T(0) = T_0,$$

med integrerende faktor.

$\boxed{5}$ Løs kretsproblemet

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) = \cos t \quad i(0) = 0$$

med integrerende faktor. (Dersom du går lei av å integrere $e^t \cos t$ to ganger med delvis integrasjon, kan du glede deg til Eulers formel. Denne kommer i slutten av semesteret.)