2 - FUNKSJONER

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Maxwell formulerte dette som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne pene formen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

noen år etter Maxwells originale publikasjon. Likningene kalles henholdsvis Gauss' lov, Faradays induksjonslov, Gauss' lov for magnetisme og Amperes lov. Dette er et koblet sett med differensiallikninger, der

- $\mathbf{E}$ er det elektriske feltet
- $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet
- c er lyshastigheten i vakuum
- ρ er ladningstetthet i rommet
- ϵ_0 er permittiviteten i vakuum
- $\mathbf{J}$ er en gitt strømtetthet i rommet

Likningene kan også skrives på integralform:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot dS &= 0 \\ \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS \\ c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot dS \end{aligned}$$

På denne siden er det mange nye symboler. Et av målene med de første årene på Gløshaugen, er å forstå matematisk fysikk, og da må vi skjønne hva alle disse symbolene betyr. Dette er et stort arbeid som tar om lag fire semestre, og nå skal vi begynne på det.

Det første vi må forstå, er konseptet funksjon.

Funksjoner

En funksjon

$$f: \ A \to B$$

er en regel som tilordner ett og bare ett element i mengden B til hvert element i A. Mengden A kalles definisjonsmengden til f, og B kalles verdimengden.

Definisjonen over er mer abstrakt enn det du kanskje er vant til. Men vi må nesten gjøre det slik. Det du putter inn i en funksjon kalles **den uavhengige variabelen**, mens det du får ut kalles **den avhengige variabelen**. Man tenker at man står nogenlunde fritt til å spesifisere den uavhengige variabelen, og så er den avhengige variabelen gitt av regelen f.

Den funksjonstypen du antagelig er mest vant til, er $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La oss repetere litt.

$\boxed{1}$ Tegn en skisse av funksjonene $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = e^x$$

og $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$g(x) = \ln x$$

for hånd.
(Dette er viktige funksjoner. Du må nesten huske hvordan de ser ut.)

De verdiene som regelen produserer når man stapper inn hele A i f, kalles **bildet** til f og skrives $f(A)$. Bildet er inneholdt i verdimengden B. Det er ikke alltid så lett å vite nøyaktig hva bildet til en funksjon er, og det hadde vært litt slitsomt å ikke kunne snakke om en funksjon uten å kjenne dette. Derfor gjør vi det enkelt, og opererer med verdimengde istedet.

$\boxed{2}$ Hva er bildet til f og g i oppgaven over? Hva er det geometriske forholdet mellom eksponensialfunksjonen og logaritmefunksjonen?

Mange kvantitative modeller er uttrykt som funksjoner. For eksempel er Shockleys diodelov gitt ved

$$i(v) = I_0 \left(e^{\frac{v}{v_0}} - 1 \right)$$

der i er strømmen gjennom en ideell diode som funksjon av spenningen v over den. Parameteren i_0 kalles reversstrømmen (dette er maksimal tillatt strøm i sperreretningen) mens v_0 kalles den termiske spenningen. Et annet eksempel er definisjonen på pH:

$$pH = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$$

Her er konsentrasjonen $[\mathrm{H_3O^+}]$ av oksoniumioner (i mol/L) den uavhengige variabelen og pH den avhengige variabelen. Som du ser er det viktig å ikke bli forvirret av notasjon. Variable kan hete både x og v og $[\mathrm{H_3O^+}]$ og mye annet.

$\boxed{3}$ Apropos logaritmer og ph og slikt. Forklar forskjellen på $\ln$ og $\log$.
(Hint: Det beste er å huske definisjonen på begge to og bare skrive dem opp. Men Richard Feynman hadde i tillegg en teknikk der han satt seg ned for å forklare konseptet til en tolvåring. Om han klarte dette var visst lakmustesten på om han hadde forstått det selv. Programmerere har gjerne en badeand på pulten som de forklarer alt til for å sortere tankene: `https://en.wikipedia.org/wiki/Rubber_duck_debugging`)

Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ er blant de aller viktigste, og det er hensiktsmessig å huske de vanligste grafene siden de dukker opp overalt i anvendelser. I lengden blir det litt klønete å si "la $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \ln x$" hver eneste gang vi skal prate om logaritmefunksjonen, så derfor slurver vi ofte og sier bare $\ln x$ istedet, og så er det underforstått at definisjonsmengden er $(0, \infty)$.

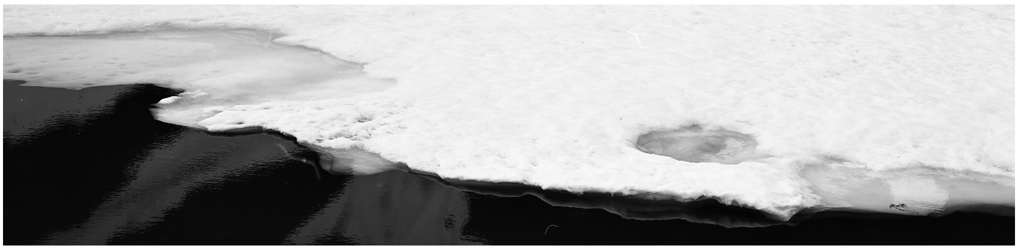
$\boxed{4}$ Skisser funksjonene x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $x^{1/3}$, $1/x$, $\sqrt{1 - x^2}$ og $|x|$.

Du finner fasit på side 27 i Adams. Dette er en god bok, og jeg lærte ganske mye av å lese den som student. Finn den på nett eller kjøp en gammel utgave billig. Jeg refererer stort sett til syvende utgave siden det er den man lettest finner på nett, men har sjette utgave i hyllen på kontoret mitt. Kapittel P i Adams er i bunn og grunn en konsis repetisjon av mye av kjernepensumet i R2.

$\boxed{5}$ Skum gjennom kapittel P og sjekk at du kan alt. Vi kommer til å bruke det.

Det er noen grunnleggende knep som er verdt å huske. La $f(x)$ være en funksjon, og a, b, c og d konstanter. Dersom du bytter ut den uavhengige variabelen x med $x - a$, flyttes hele funksjonen a knepp bortover i koordinatsystemet, mens $f(x) + b$ er flyttet b knepp i høyderetningen. Funksjonen $f(cx)$ er strukket i lengderetningen, mens $df(x)$ er strukket i høyderetningen. Dersom $c = -1$ blir funksjonen speilet om y-aksen, mens $d = -1$ speiler om x-aksen.

$\boxed{6}$ Skisser funksjonene $x - 1$, $(x + 2)^2$, $x^3 - 1$, $1 + \sqrt{4x - 1}$, $1 - x^{1/3}$, $2 - 1/x$, $1 - \sqrt{1 - x^2}$ og $1 + |x + 1|$.



Forresten. Her er kode for å plotte to grafer i Python. (Kutt ut et par av linjene for å plotte bare en av dem. Hvis du lurer på hvordan for eksempel np.linspace funker, googler du np.linspace og sjekker dokumentasjonen.)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
y=x*np.sin(x)
z=x**2*np.sin(x)
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,z)
```

Dette kommer du til å gjøre mye. Programmering er nyttig, og mange av matematikken vi gjør i dette semesteret induserer fine programmeringsoppgaver. **Glem Geogebra.**

$\boxed{7}$ Dobbeltsjekk i python at du har gjort oppgave 6 riktig.

Punktene som passer i likningen $y = f(x)$ kalles **grafen** til f. Dersom du bytter plass på x og y slik at du får likningen $x = f(y)$, speiles hele greia om linjen $x = y$.

$\boxed{8}$ Skisser kurven gitt av likningen $x = y \sin y$ for hånd og dobbeltsjekk i python.

Dette leder til noe som kalles

Den inverse funksjonen

La $f:\ A \to f(A)$ være gitt ved $y = f(x)$. Den inverse funksjonen f^{-1}, dersom den eksisterer, er en funksjon slik at

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

for alle $y \in f(A)$.

I grove trekk finner man det inverse funksjonsuttrykket ved å løse likningen $y = f(x)$ for x.

$\boxed{9}$ Finn f^{-1} dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = e^x.$$

Men vi kan støte på noen problemer her.

$\boxed{10}$ Finnes den inverse funksjonen til $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2?$$

Hva skjer når du prøver å finne den? Tegn opp.

Problemet med oppgaven over er at $x^2 + 2x + 2$ ikke er injektiv. For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ kan man si at grafen til en injektiv funksjon krysser hver vannrette linje i xy-planet maksimalt en gang. Den ordentlige definisjonen er litt mer abstrakt.

Injektivitet

En funksjon $f : A \to B$ er injektiv dersom $f(x) = f(y)$ impliserer at $x = y$.

$\boxed{9}$ Tegn en funksjon som er injektiv, og en som ikke er det. Hvilke av funksjonene i oppgave 4 er injektive dersom definisjonsmengden er $\mathbb{R}$?

$\boxed{10}$ Funksjonen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.
(Hint: sett $2x^2 + 2x + 2 = y$ og løs for x.)

$\boxed{11}$ Funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sin x$$

er injektiv om du velger A med omhu. Velg en passende A og finn og skisser den inverse funksjonen.

For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ defineres den deriverte, eller stigningstallet, som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer. Vi sier i dette tilfellet at f er deriverbar i x. Å definere grenseverdi ordentlig er ganske teknisk, så det venter vi litt med. Det finnes mange derivasjonsregler, og disse har du trent masse på når du gikk på skolen. La oss repetere litt.

$\boxed{12}$ Tegn en deriverbar funksjon med en tangentlinje og skriv opp ettpunktsformelen du lærte på gymnaset.

$\boxed{13}$ Tegn en ikke deriverbar funksjon.

$\boxed{14}$ Bruk definisjonen over til å vise at x^2 har derivert $2x$.

$\boxed{15}$ Bruk definisjonen over til å vise at x^n har derivert nx^{n-1} dersom n er et naturlig tall.

Det finnes en snedig formel for den deriverte til f^{-1}.

$\boxed{16}$ Tegn og forklar at

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f er deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Det finnes en klasse av funksjoner som er spesielt gunstige. De heter **polynomer** [1], og er funksjoner på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} n x^{n-1} + a_{n-2} n x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Dersom $a_n \neq 0$ sier vi at polynomet har orden n. Det var Rene Descartes som introduserte denne notasjonen på 1600-tallet en gang. Fordelen med polynomer er at de er enkle å analysere. Tallene $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ kalles **koeffisientene**.

$\boxed{17}$ La $f(x) = e^x$. Finn et fjerdeordens polynom p som tilfredsstiller

$$p(0) = f(0) \quad p'(0) = f'(0) \quad p''(0) = f''(0) \quad \text{og} \quad p'''(0) = f'''(0)$$

og plott begge i samme figur i python.

$\boxed{19}$ Gjenta oppgaven over, men for et polynom av orden 14.

$\boxed{20}$ Gjenta oppgavene over, men for $f(x) = \sin x$ istedet.

Vi sier at en kropp er algebraisk lukket dersom alle polynomer med koeffisienter i kroppen har et nullpunkt. Dette er ikke sant for $\mathbb{R}$, for eksempel finnes det ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

men den neste kroppen i matryosjkaen, $\mathbb{C}$ er derimot algebraisk lukket. Dette ble bevist av Jean-Robert Argand (en amatørmatematiker!) i 1806:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra`
og lyder

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

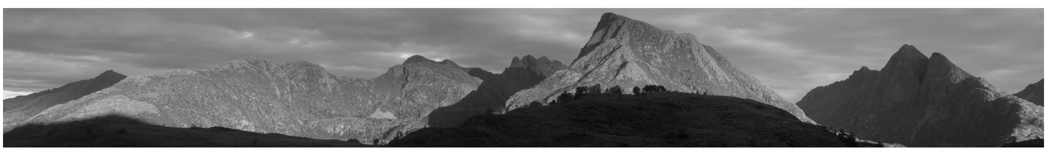
$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

Dette er altfor vanskelig å bevise for oss, men kan være artig å kjenne til fra tid til annen.

$\boxed{21}$ Delbrøksoppspalt

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

(På skolen lærte du antagelig at dette ikke går an. Men det gjør det altså.)



[1] Studenter har flere ganger foreslått at jeg bytter fornavn til Poly.

TIl slutt skal vi introdusere en helt annen type funksjon. Dersom definisjonsmengden til en funksjon f er $\mathbb{N}$ (istedet for $\mathbb{R}$ som du er vant til), kalles f en følge. Funksjonsverdiene $f(n)$ kalles leddene i følgen, og vi skriver f_n istedet for $f(n)$. Vi skal drive ganske mye med følger dette semesteret.

$\boxed{22}$ Tegn en skisse av funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f_n = \ln n$$

for hånd.

I praktiske situasjoner er formelen for leddene i en følge som regel gitt av en rekursjon. Dette er en formel som gir et ledd i følgen som funksjon av et eller flere foregående ledd. Det mest klassiske eksemplet er Fibonaccis følge

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{og} \quad x_1 = x_2 = 1$$

$\boxed{23}$ Skriv ut et par ledd i denne følgen.

Det som er litt artig med fibonaccifølgen, er at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

blir det gyldne snitt:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio`

$\boxed{24}$ Det går an å finne et uttrykk for x_n som funksjon av n (altså ikke en rekursjon) i Fibonaccifølgen. Teknikken er analog til teknikken for å løse andreordens lineære differensiallikninger, som du lærte på gymnaset: Gjør en kvalifisert gjetning på at

$$x_n = \phi^n,$$

sett dette inn i rekursjonen $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, og regn i vei. Hva kan ϕ være?

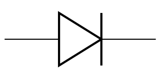
UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ For noen funksjoner er $f^{-1} = f$. Dette kalles "selv-invers". Kan du finne noen? Hvordan ser dette ut geometrisk?

UKENS ELEKTROTEKNIKK

Siden dere på MTTK tar ADE, er ukens elektroteknikk relevant for dere. Det er ikke så mange tiår siden kybernetikk- og elektroteknikkstudiene var så og si identiske de første par studieårene.

I en krets er en diode markert ved symbolet



Shockleys diodelov er en enkel modell som beskriver oppførselen til dioden. Den sier at

$$i(v) = I_0 \left(e^{\frac{v}{v_0}} - 1 \right)$$

der i spenningen over dioden som funksjon av strømmen gjennom den. Reversstrømmen i_0 er den maksimale strømmen dioden tåler i sperreretning før den ryker. Den termiske spenningen v_0 er gitt ved

$$v_0 = \frac{kT}{nq}$$

der

k er Boltzmanns konstant:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant`

T er temperaturen i Kelvin:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin`

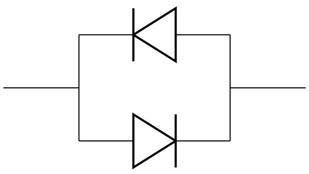
q er elektronladningen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_charge`
og

n er en diodespesifikk idealitetsfaktor:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Diode`

$\boxed{1}$ Lag et plott av i mot v.

$\boxed{2}$ Finn $v(i)$.

$\boxed{3}$ Dersom du kobler to identiske dioder i parallell slik:



blir forholdet mellom strøm og spenning gitt ved

$$i(v) = I_0 \left(e^{\frac{v}{v_0}} - e^{-\frac{v}{v_0}} \right) = 2I_0 \sinh \frac{v}{v_0}$$

Forklar.

Hvis du går MTKJ og tilfeldigvis leser dette, kan Svein avsløre at denne parallellkoblingen av dioder dukker opp på anoden i en eller annen elektrokjemisk celle:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Butler%E2%80%93Volmer_equation`

UKENS KJEMI

Den ideelle gasslov gir opphav til forskjellige funskjoner. Du kan tenke på den ideelle gasslov enten som en empirisk lov som sakte men sikkert ble oppdaget på 1600-tallet og utover via Boyles lov, Charles lov, Avogadros lov og Guy-Lussacs lov, eller som en utledet regel i statistisk mekanikk:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law`
Den sier at i en ideell gass er henger trykket p, temperaturen T og volumet V sammen etter formelen

$$\frac{pV}{T} = nR = Nk.$$

Her er

k: Boltzmanns konstant
`https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant`

R: Den ideelle gasskonstant
`https://en.wikipedia.org/wiki/Gas_constant`

N: Antall gassmolekyler

n: Antall mol gassmolekyler
(husk at $N = N_A n$, der $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23}$/mol er Avogadros konstant)

Hvis man liker bedre statistisk mekanikk, kan man skrive

$$\frac{3}{2}\frac{pV}{N} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$$

der v er forventningsverdien til den χ-fordelte partikkelhastigheten[2]:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution`
På folkemunne sier vi at v er gjennomsnittshastigheten til gassmolekylene. Vi skal ta en kikk på sannsynlighetsfordelinger senere i semesteret.

$\boxed{1}$ Skisser (nøyaktig!) trykk som en funksjon av temperatur ved konstant volum, og temperatur som funksjon av trykk ved konstant volum.
(Husk inverse funksjoner!)

$\boxed{2}$ Gjenta for trykk og volum ved konstant temperatur.

$\boxed{3}$ Gjenta for temperatur og volum ved konstant trykk.

Sannsynlighetsfordelinger er viktige. Hvis du er nysgjerrig, kan du lese her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Kinetic_theory_of_gases`

[2] leses “kji”