TMA4101/4106/4111/4121

TALL

Velkommen til øvingsopplegget i TMA4101. Hver øving skal gi deg erfaring og trening, samt stimulere til refleksjon. Det er ingen hjelpemidler på eksamen i TMA4101/4106/4111/4121, så derfor er man pent nødt til å huske en del ting. **Bruk penn og papir:**

`https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/33815075/`

Grunnen til at vi gjør det slik, er at det er utrolig mye lettere å huske noe man har forstått enn noe man ikke har forstått. **Om man pugger uten å prøve å forstå, er man på villspor.**

Homo Sapiens store styrke er ikke å huske usammenhengende faktaopplysninger. Selv sjimpanser er antagelig mye bedre enn oss til dette:
`https://www.youtube.com/watch?v=zsXP8qeFF6A`
Vår store styrke er derimot å formidle ting vi kan (eller ikke kan!) til våre mindre artsfrender, og kopiere adferden til våre mer erfarne artsfrender:
https://phys.org/news/2020-01-copycats-key-human.html

Alle studenter liker at kurs er ryddige og at det er klart hva man skal gjøre for å oppnå mestring og få en god karakter på eksamen. Men her er sitat av Richard Feynman, en av det tyvende århundrets største fysikere:

> It's impossible to learn very much by simply sitting in a lecture, or even by simply doing problems that are assigned.

Verden er dessverre et uryddig sted, og universitetets jobb er å forberede studenter på verden. Evne til å tenke selv er viktig i mange jobber, og jo før du frir deg fra ideen om "skole", desto bedre. Richard Feynman igjen:

> You'll learn infinitely better and easier and more completely by picking a problem for yourself that you find interesting to fiddle around with—some kind of a thing that you heard that you don't understand, or you want to analyze further, or want to do some kind of a trick with—that's the best way to learn something.

Matematikk er et modningsfag. Man må repetere og bruke ting hele tiden for å huske dem. Fokuser på læring heller enn mestring, og ikke bekymre deg så mye for karakterer. Vi har alle forskjellig talent for matematikk, og alle kan ikke få A. Det er viktig at du finner og aksepterer ditt personlige nivå, slik at du kan bli fornøyd med livet. Hvis du har kommet inn på et sivingstudie på Gløshaugen, er det stor sannsynlighet for at du var en av dem som seilte gjennom skolen med letthet, men nå går du i en klasse fylt til randen av studenter som også seilte gjennom skolen med letthet. Richard Feynman oppsummerte alt dette greit med følgende spøk:

> And so you guys have been very carefully picked out from all these schools to come here. But we're still working on it, because we've found a very serious problem: no matter how carefully we select the men[a], no matter how patiently we make the analysis, when they get here something happens: it always turns out that approximately half of them are below average!
>
> [a]På 60-tallet fikk kun menn lov til å studere på Caltech

Skolen gir de flinke elevene et skjevt bilde av livet. Det er **ikke** meningen at du skal få til alle oppgaver i øvingene. For det første er noen oppgaver mer relevante for noen studieprogram enn andre, for det andre har vi forskjellig bakgrunn, og for det tredje har vi forskjellige interesser. Noen studenter er av tilfeldige årsaker bedre rustet til å takle noen oppgaver enn andre studenter. Dersom moren din er programmerer er det mer sannsynlig at du kan programmere enn hvis hun er gitarist, frisør eller tannlege. Det er viktig å venne seg til at det alltid er masse man ikke forstår. Takler du ikke det, bør du studere noe annet.

En tekst i matematikk inneholder en serie utsagn. Disse kan man sortere i utsagn som kan være enten riktige eller gale, og utsagn som ikke kan være enten riktige eller gale. Sistnevnte kalles definisjoner, og disse kommer i blå bokser:

En definisjon

Et rasjonalt tall er et tall $q = \frac{a}{b}$ der a og $b \neq 0$ er hele tall.

Alle mennesker står fritt til å definere hva de mener med rasjonale tall, og derfor kan dette utsagnet hverken være riktig eller galt. Hvis du prøver deg på en alternativ definisjon som går på tverke med konvensjonen i resten av verden, vil onde tunger hevde at definisjonen din er feil, men den er strengt tatt bare mot strømmen. Utsagn som kan være enten riktige eller gale, kalles teoremer. Disse må utledes, og kommer i røde bokser:

En utledet regel

Det finnes ikke noe rasjonalt tall p slik at $p^2 = 2$.

Slike tilsynelatende enkle utsagn kan være overraskende vanskelige å bevise. Utsagnet over er sant, men ikke innlysende. Av og til er det så vanskelig å utlede nyttige faktaopplysninger at vi må la det være. Dette er innafor i matematikkurs for sivilingeniører, men ikke i et kurs for matematikkstudenter. For matematikere er bevisprosessen veldig viktig.

Nederst i filen finner du litteraturhenvisninger. Det er viktig å oppsøke flere kilder. Vi har alle litt forskjellig smak, og alle bøker har sine styrker og svakheter.

MENGDER

En **mengde** er en samling med ting, kalt **elementer**. I grunnleggende matematikk er elementene gjerne tall, mens i sannsynlighetsregning er elementene utfall. I studier av symmetri, kan elementene være forskjellige måter å orientere et legeme på i rommet. Vi kan også ha en punktmengde i planet eller i rommet, en sirkelskive eller et kuleskall, eller noe helt annet.

For eksempel er

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en mengde med fem elementer, og

$$B = \{1, 3, 5, \pi\}$$

en mengde med fire elementer, og primtallene en mengde med uendelig mange elementer. [1] Vi skriver

$$\pi \in B$$

for å uttrykke at π er et av elementene i B.

To vanlige operasjoner på mengder, er union:

$$\cup$$

og snitt:

$$\cap$$

Unionen mellom A og B er er en mengde som inneholder alle elementer som er med i enten A eller i B eller i begge:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$$

Snitt er en mengde som inneholder de elementene som er i både A og i B:

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Dersom alle elementer i en mengde A er inneholdt i en større mengde B, skriver vi

$$A \subset B,$$

som er er det samme som at

$$A \cap B = A.$$

Dersom det hersker litt usikkerhet om hvorvidt $A \subset B$ eller $A = B$ skriver vi

$$A \subseteq B.$$

Vi skriver

$$A - B$$

for mengden av alle elementer som er i A, men ikke i B, og

$$\overline{A}$$

(leses "ikke A") for alle elementer som ikke er i A. En mengde uten elementer kalles "den tomme mengden", og ser slik ut:

$$\emptyset$$

[1] Dette ble bevist av Euklid omtrent 300 BC.

Denne er praktisk å ha, for nå kan vi skrive

$$A \cap B = \emptyset$$

for å uttrykke at A og B ikke har noen felles elementer, og

$$A \neq \emptyset$$

for å uttrykke at det finnes noen elementer i A.

Nå kommer det en oppgave.

$\boxed{1}$ Finn en tavle og en studiekamerat og forklar hva en mengde er og forklar hva de vanligste operasjonene på mengder er, men lag eksemplene selv. Du lærer mest effektivt av å hele tiden teste din egen kunnskap foran medstudenter.

I dette kurset spiller ikke mengder en kjempesentral rolle, men for eksempel sannsynlighetsregning blir veldig mye enklere dersom man forstår grunnleggende mengdelære. Et utfall er noe som kan skje, og en hendelse er en mengde av utfall. Mengden av alle utfall kalles utfallsrommet.

$\boxed{2}$ Vi kaster tre terninger og teller totalt antall øyne. Skriv ned utfallsrommet med mengdenotasjon.

TALL

På Gløshaugen og andre steder opererer vi stort sett med seks **tallmengder**:

Viktige tallmengder

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

La oss ta en kort gjennomgang av disse. Den innerste tallmengden, $\mathbb{N}$, kalles **naturlige tall**, og er de som du bruker når du teller:

Naturlige tall

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$$

De første sikre arkeologiske tegn på menneskelig bruk av tall, er omtrent 30000 år gamle, mens det første ordentlige tallsystemet er babylonsk og oppsto omtrent 3400 BC. Noen dyr kan antagelig telle litt. [2] Studiet av naturlige tall fascinerer mange, fordi enkle spørsmål kan være temmelig hårete å svare på. Det er for eksempel ingen som vet om det finnes uendelig mange tvillingprimpar, slik som 11 og 13 eller 29 og 31.

[2] https://www.uib.no/ka/50862/levde-med-ørn

$\boxed{1}$ Finnes det uendelig mange primtall? Finn en studiekamerat og argumenter for eller mot.

Den mest kjente faktaopplysningen om naturlige tall har vært kjent siden antikken. Den er litt for vanskelig å bevise for oss, og dessuten litt på siden av det en typisk ingeniør trenger.

Aritmetikkens fundamentalteorem

Alle hele tall kan faktoriseres i primtall på en entydig måte.

Det er mulig å bytte om på faktorenes orden, men dette ser vi åpenbart vekk fra. Det er fornuftig å definere at 1 ikke er et primtall, for ellers hadde teoremet blitt noe mer klønete å skrive opp. Studiet av primtall er både fascinerende og nyttig. Moderne kryptografi er for eksempel utenkelig uten primtall. [3]

Den neste tallmengden, $\mathbb{Z}$, kalles **hele tall**. Disse består av de naturlige tallene samt de negative heltallene og null:

Hele tall

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2...\}$$

De negative tallene ble oppfunnet av en kineser omtrent 200 AD, selv om vi i vesten liker å si at de ble oppfunnet av Rene Descartes på 1600-tallet. Null er en litt eldre oppfinnelse, her snakker vi Egypt nesten to tusen år Kristus. Den egyptiske hieroglyfen for null, nfr, betyr noe sånt som vakker. Mayaindianerne oppdaget også null, men det var mye senere, omtrent år null.

Den neste, de **rasjonale tallene** $\mathbb{Q}$, er alle brøker

Rasjonale tall

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \quad \text{der} \quad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

De positive rasjonale tallene har antageligvis vært i bruk lengre enn de negative hele tallene, men det er ikke så godt å vite. Det er ikke utenkelig at noen mennesker hadde en ide om hvordan man skulle dele tre epler likt på fem personer lenge før skriftspråk oppsto, men de første sikre skriftlige kilder er fra noen hundre år før Kristus. Euklids Elementer fra omtrent 300 BC er kanskje den mest kjente. De rasjonale tallene har noen problemer - slett ikke alle tall kan skrives som en brøk!

$\boxed{2}$ Prøv deg på å forklare at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Dette har vært kjent i India siden omtrent 700 BC, og på lunsjrommet vårt fortelles røverhistorien at Hippasos ble kastet på havet av Pytagoras da han oppdaget dette. [4]

Tall som ikke kan skrives som brøk, kalles **irrasjonale tall**. Det er noe litt uforløst over å ha et tallsystem der det ikke finnes noe tall for diagonalen i et kvadrat med sidekant 1, og derfor har vi reelle tall. Men de **reelle tallene** $\mathbb{R}$ er ikke så lett å forklare hva er. Richard Dedekind var selv veldig

[3] `https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-15453-0_9`

[4] Dette var visst pinlig for Pytagoras, som hele livet hadde påstått at alle tall kunne skrives som en brøk.

spesifikk på at han skrev ned den første presise definisjonen den 24. november 1858, men Georg Cantor var først ute med å publisere en definisjon i 1871. Denne definisjonen er ganske vanskelig, og det kan gjøres på mange måter. Det enkleste er kanskje slik:

Reelle tall

$$\mathbb{R} = \{\text{alle regler for å dele de rasjonale tallene i to}\}$$

For eksempel identifiserer vi $\sqrt[3]{2}$ med mengden av alle rasjonale tall p slik at $p^3 < 2$.

Men ikke tenk så mye på det. Et grundig studium av de reelle tall er mest interessant for matematikere, og Isaac Newton fant ut av differensialregning lenge før noen skjønte hva de reelle tallene var for noe. Hvis du skjønner at ikke alt kan skrives som en brøk, har du kommet lenger enn Pytagoras. [5] Det er viktigere å skjønne de **komplekse tallene** $\mathbb{C}$. Moderne teknologi er utenkelig uten komplekse tall. Den første som begynte å fikle med dette, var Girolamo Cardano i 1545, i forbindelse med løsninger av polynomlikninger. Cardano løste en tredjegradslikning, men man kan introdusere komplekse tall ved å studere noe enklere. Likningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonal løsning. Derfor har vi funnet opp noe vi bare kaller $\sqrt{2}$, som vi tenker på som diagonalen i et kvadrat med sidekant 1. Likeledes har ikke likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

noen reell løsning, så vi kan like gjerne finne opp et tall til. Det kalles den imaginære enheten, skrives i, og kjennetegnes ved at

$$i^2 = -1.$$

$\boxed{3}$ Hva må du gange med seg selv for å få -4?

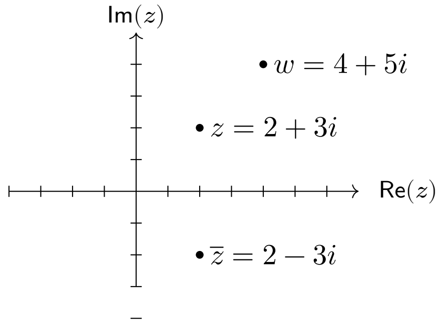
$\boxed{4}$ Finn alle løsninger av likningen $x^2 + 2x + 2 = 0$, bruk i til å skrive opp svaret på en fornuftig måte, og faktoriser polynomet $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

Oppgavene over inspirerer oss til å definere komplekse tall på kartesisk form:

Komplekse tall

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \qquad \text{der} \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis *realdelen* og *imaginærdelen* til z, og skrives gjerne Re(z) og Im(z). De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene, for dersom $b = 0$, er z reell. Et komplekst tall likner på mange måter en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i *wesselplanet* eller *det komplekse planet*.



Wesselplanet aka *det komplekse planet*

[5] Antagelig er røverhistorien over ikke sann. Historikerne vet visst veldig lite om Pytagoras, men røverhistoriene blir fortalt igjen og igjen.

Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$.

Regneregler for komplekse tall

La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Vi har

$$z + w = a + c + (b + d)i$$
$$z - w = a - c + (b - d)i$$
$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$
$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Merk at komplekse tall legges sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$ i 'vanlig bruk'.

$\boxed{5}$ La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$. Regn ut $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$ og z/w.

$\boxed{6}$ Husk definisjonen av i og utled regnereglene.

Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z *konjugert*:

$$\overline{z} = a - bi$$

Merk at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall.

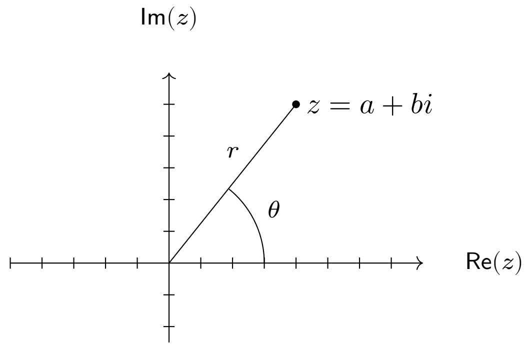
$\boxed{7}$ La $z = a + bi$ og w være komplekse tall. Vis at:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$
$$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2bi$$

(De er ikke så vanskelige, bare skriv $z = a + bi$ og ta det derfra.)

La r være avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Forhåpentligvis er du enig i at

$$a = \text{Re}(z) = r\cos\theta$$
$$b = \text{Im}(z) = r\sin\theta$$



Polare koordinater

Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne *absoluttverdi* eller *modulus* til z. Vinkelen $\theta = \arg z$ kalles *vinkelen* eller *argumentet* til z. Geometrien til de komplekse tallene er litt annerledes enn du kanskje er vant til.

8 La z være et valgfritt komplekst tall. Tegn z og en sirkel sentrert i origo med radius $|z|$ i samme koordinatsystem. Tegn så iz, $-z$, $-iz$ i det samme koordinatsystemet. Hva ser du?

W. D. Hamilton fant i 1843 opp **kvaternionene** $\mathbb{H}$, som er en slags utvidelse av de komplekse tallene, og den ytterste tallmengden i boksen øverst. Utvidelsen består i at man legger til to nye imaginære enheter j og k, definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inksripsjonen er dessverre vekk. Kvaternioner er godt egnet til å holde styr på et legemes orientering i rommet, så dersom du går MTTK og skal jobbe med satelitter, vil du før eller siden få bruk for disse. Da de landet på månen første gang, visste de ikke at dette var lurt. [6]

9 Vis at $ij = k$. Likner dette på noe du har sett før?

Vi definerer $\mathbb{R}^n$ som mengden av alle vektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

der $x_k \in \mathbb{R}$, og $\mathbb{C}^n$ som mengden av alle slike vektorer med $x_k \in \mathbb{C}$. Skalarproduktet mellom vektorer i $\mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

og den pytagoreiske lengden er gitt ved

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

For $\mathbb{C}^n$ er vi mest interessert i

$$\overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k.$$

[6] https://www.hq.nasa.gov/alsj/gimbals.html

ALGEBRAISKE STRUKTURER

I denne delen er det mye stoff, og ikke alt er like relevant for alle linjer. Velg en algebraisk struktur som er relevant for ditt fagfelt, og konsentrer deg om den.

Tallmengdene over er eksempler på noe som kalles

Algebraisk struktur

En algebraisk struktur er en mengde med elementer og en eller flere binære regneregler for å kombinere dem. Mengden må være lukket under regnereglene.

Regneregler du er vant til, er binære; de kombinerer to elementer til et nytt element. De klassiske eksemplene er addisjon og multiplikasjon. Vi sier at en mengde er lukket under en regneregel dersom alle kombinasjoner av elementer også er med i mengden. For eksempel er mengden

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ikke lukket under addisjon, siden

$$3 + 4 = 7 \notin A.$$

Alle rasjonale tall er for eksempel lukket under addisjon, siden summen av to rasjonale tall er et rasjonalt tall.

$\boxed{1}$ Er mengden av alle primtall lukket under addisjon eller multiplikasjon?

$\boxed{2}$ Dersom klokken er ti om kvelden vi avtaler å møtes på en bar om tre timer, utfører du operasjonen

$$22 + 3 = 1$$

dersom du opererer med tjuefiretimerssystemet for klokkeslett, og

$$10 + 3 = 1$$

dersom du opererer med tolvtimerssystemet. Er klokkeslettene en algebraisk struktur under addisjon av klokkeslett?

Hvis vanlig regning var alt en ingeniør trengte, hadde livet vært greit. Men grunnen til at det er lurt å vite hva en algebraisk struktur er, er at de brukes til å lage teoretiske modeller for oppførselen til faktiske ting. Her er noen eksempler:

- **Kropper** brukes til å modellere helt vanlig regning. Moderne elektroteknikk hadde vært temmelig knotete uten komplekse tall. Relevant for alle linjer.

- **Grupper** brukes til å modellere romlige symmetrier. Dette er viktig i analyse av molekyler og molekylgitre. For ikke å snakke om tapetmønstre. De brukes også til å holde styr på rotasjoner i rom. Dette er viktig i reguleringsteknikk. Relevant for MTKJ og MTTK.

- **Boolsk algebra** brukes til å modellere oppførselen til datamaskinen din. Dette er viktig i digitallogikk og teoretisk informatikk. Relevant for MTTK og MTELSYS.

- **Vektorrom** brukes til å modellere vektorer i rommet og løsningene til lineære differensiallikninger. Relevant for alle linjer.

- **Indreproduktrom** brukes i geometri, til å modellere frekvensinnholdet i signaler, og atomer og molekylers kvantemekaniske tilstander. Relevant for alle linjer.

For alle algebraiske strukturer setter vi opp **aksiomer**. Et aksiom er et element i en smørbrødliste i en definisjon. Du kan tenke på det som en slags liten deldefinisjon inni en annen definisjon. Når en matematiker sier at han eller hun forstår et eller annet, betyr det noe sånt som at vedkommende skjønner omtrent hvordan dette er utledet fra et sett med aksiomer. Nå tar vi en rask gjennomgang av strukturene i listen over. Oppgavene er tildels vanskelige, ikke forvent å klare dem på strak arm.

En **kropp** er en algebraisk struktur med to operasjoner, addisjon $(+)$ og og mutliplikasjon $(\cdot)$:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Field_(mathematics)`
Det er vanlig å sløyfe gangetegnet, og skrive

$$x \cdot y = xy.$$

La F være en kropp. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for addisjon:

Addisjon

1 Addisjonen er assositativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$

2 Addisjonen er kommutativ: $x+y = y+x$

3 Additiv identitet: Det finnes et element 0 slik at $x+0 = x$

4 Additiv invers: For hver x finnes y slik at $x+y=0$

Det additive inverselement til x skrives $-x$, og 0 er sin egen additive invers. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for multiplikasjon:

Multiplikasjon

5 Mutliplikasjonen er assositativ: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

6 Multiplikasjonen er kommutativ: $x \cdot y = y \cdot x.$

7 Multiplikativ identitet: Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x.$

8 Multiplikativ invers: For hver $x \neq 0$ finnes y slik at $x \cdot y = 1.$

Det multiplikative inverselement til x skrives

$$1/x \quad \text{eller} \quad \frac{1}{x}.$$

Til slutt er det et aksiom for rekkefølgen på regneoperasjonene:

Det distributive aksiomet

9 Multiplikasjon er distributivt over addisjon:
$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

Aksiomene over mange av regnereglene du lærte på barneskolen, for eksempel $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ og slikt. Matematikere har skjønt at dersom man definerer kropp med aksiomene over, følger andre regneregler som konsekvenser av disse. For eksempel er

$$0 \cdot x = 0 \qquad \text{og} \qquad (-1) \cdot (-1) = 1$$

og så videre.

$\boxed{3}$ Utled disse to fra aksiomene for kropp.

Vi sier at en kropp er ordnet dersom den er en

Ordnet mengde

En mengde er ordnet dersom det finnes en relasjon $<$ slik at

1 kun en av

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

er sann for et gitt par x, y

2 dersom $x < y$ og $y < z$ er $x < z$ for alle x, y, z

$\boxed{4}$ Tallmengdene $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er alle kropper. Hvilke av dem er ordnede?

Boolsk algebra er oppkalt etter George Boole. Det er en algebraisk struktur med minst to elementer, og to operasjoner, $+$ og $\cdot$.

Aksiomer for $+$

1 kommutativitet: $x + y = y + x$.

2 identitet: Det finnes et elelement 0 slik at $0 + x = x$.

3 komplement: For hver x finnes y slik at $x + y = 1$.

Aksiomer for $\cdot$

4 kommutativitet: $x \cdot y = y \cdot x$.

5 identitet: Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x$.

6 komplement: For hver x finnes y slik at $x \cdot y = 0$.

Distributive aksiomer

7 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

8 $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

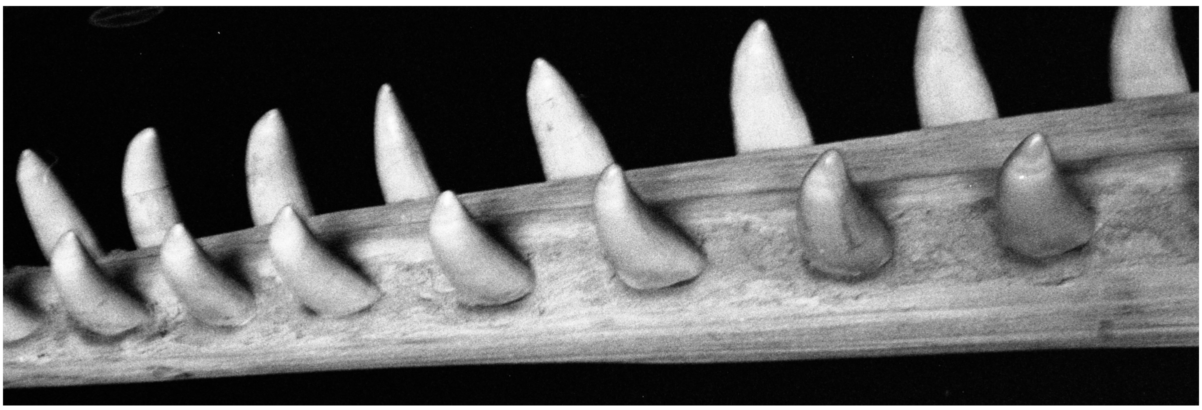
Som du ser er dette helt annerledes enn kropp. Vi har komplement istedet for invers, og assosiatitivitet er ikke med fordi det kan utledes av de andre aksiomene. Distributivitet kommer i to varianter, ikke bare i en som vi er vant til fra kropp.

$\boxed{5}$ Vis at $x + x = x$ og at $xx = x$.

Alt dette blir selvfølgelig mindfuck i begynnelsen, men som sagt er dette en nyttig modell av digitallogikk, og alt blir lettere å forstå om man sier "og" for $\cdot$ og "eller" for $+$. Du kan tenke på x som et utsagn som er enten sant eller usant. Uttrykket

$$x + x = x$$

betyr noe sånt som at "x og x har den samme sannhetsverdien som x" eller noe slikt.



En annen algebraisk struktur kalles **gruppe**:
https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)
Denne har bare en operasjon, og er en av de mest fundamentale algebraiske strukturene. Det er en mengde G med elementer og en assosiativ operasjon $\cdot$ for å kombinere dem.

En gruppe må inneholde

1 et identitetselement e slik at $g \cdot e = e \cdot g = g$ for alle $g \in G$.
2 et inverselement for alle $g \in G$, altså et element g^{-1} slik $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

$\boxed{6}$ Er de naturlige tallene $\mathbb{N}$ en gruppe under addisjon? Multiplikasjon?

$\boxed{7}$ Hva med $\mathbb{Z}$?

$\boxed{8}$ $\mathbb{Q}$?

Grupper brukes til å modellere symmetri. Det for eksempel kun mulig å konstruere sytten forskjellige symmetriske tapetmønstre:
https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group
Krystallstrukturer kommer derimot i trettito varianter, og disse er veldig viktige i faststoffysikk og kjemi og så videre:
https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system
Tolvtonesystemet vi bruker i vestlig musikk er en gruppe som heter $\mathbb{Z}_{12}$. Dimakkorden og heltoneskalaen er undergrupper:
https://www.jstor.org/stable/25164658

Den siste algebaiske strukturen vi skal smake på er **vektorrom**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space`
Denne har du egentlig jobbet ganske mye med.

Hva er egentlig en vektor? Svaret på dette spørsmålet avhenger av hvem du spør. Noen vil si at det er en pil med lengde og retning som kan brukes til å beskrive for eksempel fart. Noen vil si at det er en liste med tall. En matematiker vil si at det er noe som tilfredsstiller aksiomene for vektorrom, mens en ingeniør vil kanskje si at det er noe du ikke trenger bry deg særlig med så lenge du forstår superposisjonsprinsippet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle`

Vektorromskonseptet har som formål å binde sammen ting som ser forskjellig ut, men som oppfører seg veldig likt på noen måter. Her kommer et eksempel. La oss ta følgende vektor i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og skrive den slik:

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette kalles en **lineærkombinasjon**. Du kan tenke på $\mathbb{R}^2$ som alle lineærkombinasjoner av disse to vektorene. Løsningene til differensiallikningen

$$\ddot{x} + x = 0$$

er likeledes alle lineærkombinasjoner på formen

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Disse to mengdene likner i den forstand at begge består av alle lineærkombinasjoner av to ting. Det et matematiske konseptet som binder sammen disse greiene heter vektorrom. Noen elsker det og noen hater det.

Lineærkombinasjonen

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w}.$$

av vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ med vekter a og b, er satt sammen av vektoraddisjon

$$\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

og skalarmultiplikasjon

$$a\mathbf{v}.$$

Disse to operasjonene har du jobbet med siden gymnaset og er sentrale for vektorrom.

Vektorromsaksiomene

La $\mathbf{V}$ være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres, og $\mathbb{K}$ en kropp. Vi sier at mengden $\mathbf{V}$ er et vektorrom over $\mathbb{K}$ dersom følgende er tilfredsstilt for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$:

Det skal finnes en vektor, kalt $\mathbf{0}$, slik at

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

og kommutativ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

og vektorer

$$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}.$$

Vi må også kreve at

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

og at

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{9}$ Vis at $\mathbf{v}$ og $(-1)\mathbf{v}$ summerer til nullvektoren.

$\boxed{10}$ Vis at det bare kan finnes en nullvektor.

$\boxed{11}$ Vis at

$$a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{12}$ Vis at dersom

$$a\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

må enten $a = 0$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

På skolen lærte du om skalarproduktet. Det finnes en generalisering av dette som kalles indreprodukt, og et vektorrom med et indreprodukt, kalles et **indreproduktrom**. Et indreprodukt er et produkt $(\cdot, \cdot)$ av to vektorer som produserer et tall, og tilfredsstiller

Reelt indreprodukt

La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$, la $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer, og a og b relle tall. Et indreprodukt er en funksjon som tar inn to vektorer og gir ut et tall. Indreproduktet skal være symmetrisk:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

positivt definitt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

og lineært i første faktor:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$\boxed{13}$ Vis at indreproduktet er lineært også i andre faktor.

$\boxed{14}$ Vis at skalarproduktet du lærte om på skolen er et indreprodukt.

Indreproduktrom er sentrale i signalbehandling, kvantemekanikk og reguleringsteknikk. Vi skal plages mye med indreproduktrom etterhvert.

UKENS MORO

I totallssystemet ønsker vi å skrive tall som en sum av toerpotenser. Dette er viktig i datamaskiner, siden all informasjon lagres som konfigurasjoner av små elektriske brytere som kan være enten av eller på. La x være et naturlig tall, det er det enkleste i begynnelsen. Vi vil ha

$$x = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 2^0$$

Koeffisientene a_k kan være 0 eller 1, og kalles de binære sifrene. [7]

$\boxed{1}$ Skriv tallene 31, 127, 346 og 1025 i totallssystemet.

LITTERATUR

Kjemi handler i stor grad om elektriske krefter mellom partikler, så det bør ikke komme som en stor overraskelse at anvendelser innen elektroteknikk kan være nyttige for kjemistudenter. Hver gang du leverer strøm til en krets med et batteri, er det kjemi inne i bildet, så det bør heller ikke komme som noe sjokk at anvendelser innen kjemi kan være nyttige for elektrostudenter. Evolusjonen har gjennom de siste 3.7 milliarder år laget og løst tonnevis av små reguleringstekniske problemer i kroppen din, som alle er basert på elektrokjemi, så det bør kanskje ikke komme som noe sjokk at elektro og kjemi kan være relevant for kybernetikkstudenter. Både kjemi og elektro må lære kvantefysikk for å forstå gitterstrukturer i faste stoffer. Forresten er alt bare fysikk. For å oppsummere:

[7]Det finnes 10 typer personer i verden, de som skjønner totallssystemet, og de som ikke gjør det.

Alt henger sammen med alt. Alt er fysiske lover. Matematikk er språket.

Les innledningskapitlet i Adams for gode tips om å studere matematikk. Hvis du er mest interessert i hva matematikk kan brukes til, er det lurt å lese Kreyszig. Les også The Feynman Lectures on Physics:
https://www.feynmanlectures.caltech.edu