NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4121 Matematikk 4 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 29.05.2024

Eksamenstid (fra–til): 15:00 - 19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: ??

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Vi beregner først

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektormatrisen til $A^T A$ er identitetsmatrisen siden $A^T A$ er diagonal, mens egenvektormatrisen til AA^T er oppgitt til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Egenverdiene er en dobbel 2 (disse står på diagonalen i $A^T A$) og en dobbel 0 (siden $A^T A$ er 2×2 og AA^T er 4×4), så den reduserte svd-faktoriseringen er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mens den fulle er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Oppgave 2 Maclaurinrekken til sinusfunksjonen er

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{4}$$

så laurentrekken til integreanden er

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots \tag{5}$$

Koeffisienten til $1/z$ i denne er null, så

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\, dz = 0.$$

Oppgave 3 Vi setter

$$u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v(r,\theta)$$

La oss først derivere litt. Med hensyn på r får vi

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta
\end{aligned}$$

Så deriverer vi med hensyn på θ, og får

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta$$

og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} r\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) r\sin\theta \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) r\cos\theta \\
&\qquad - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta
\end{aligned}$$

Hvis du nå tar tre av disse og deler litt på noen r-er og setter dem sammen og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = &\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta\right) \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right) \\
&+ \frac{1}{r^2}\Bigg(- \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) r\sin\theta \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\right) r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta\Bigg) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

a) Tidsnvarians betyr at ingenting endres med tiden, og da er alle tidsdervierte null, slik at vi får

$$
\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
$$

$$
\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}
$$

Likningen $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ impliserer at $\mathbf{E}$ er gradienten til et skalarfelt:

$$
\mathbf{E} = -\nabla \phi
$$

Vi setter dette inn i den første likningen over, og får

$$
-\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}
$$

slik at

$$
\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.
$$

b) I tomt rom er $\rho = 0$ (ingen ladning) og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ (ingen strøm), så likningene blir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Vi deriverer Maxwells siste lov med hensyn på t og får

$$c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \ddot{\mathbf{E}}$$

og dersom vi setter Maxwells andre lov inn i denne, får vi

$$-c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \ddot{\mathbf{E}}.$$

Nå er det bare å bruke forrige oppgave, og skrive

$$-c^2 \left(\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E} \right) - \Delta \mathbf{E} \right) = \ddot{\mathbf{E}}.$$

Det første leddet kansellerer på grunn av Maxwells første lov, og vi står igjen med

$$\ddot{\mathbf{E}} = c^2 \Delta \mathbf{E}$$

Med andre ord impliserer Maxwells lover at elektriske felt raser rundt som bølger. Utledningen for magnetiske felt er identisk.

Oppgave 5

a) La $\Omega(x, r)$ være kulen sentrert i x og med radius r, og la

$$z(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} z_1(\theta, \phi) \\ z_2(\theta, \phi) \\ z_3(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + r \cos\theta \sin\phi \\ x_2 + r \sin\theta \sin\phi \\ x_3 + r \cos\phi \end{pmatrix}$$

være parametriseringen til kuleskallet, med enhetsutnormalvektor

$$n(\theta, \phi) = \frac{\partial z}{\partial n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

og flateelement $r^2 \sin\phi \; d\phi d\theta$. Vi beregner så:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega(x,r)} u\, dS\right) =& \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\Big(z(\theta,\phi)\Big)\sin\phi\ d\phi d\theta\right)\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\Big(u\Big(z(\theta,\phi)\Big)\Big)\sin\phi\ d\phi d\theta\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u'\Big(z(\theta,\phi)\Big)\cdot\frac{\partial z}{\partial n}\sin\phi\ d\phi d\theta\\
=&\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u'\Big(z(\theta,\phi)\Big)\cdot\frac{\partial z}{\partial n}r^2\sin\phi\ d\phi d\theta\\
=&\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega(x,r)}\frac{\partial u}{\partial n}\ dS\\
=&\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{\Omega(x,r)}\Delta u = 0.
\end{aligned}
$$

b) Siden integralet

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS$$

er konstant som funksjon av r, kan vi ta

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS = \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS = u(x).$$

La

$$z(s,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_1 + s\cos\theta\sin\phi\\ x_2 + s\sin\theta\sin\phi\\ x_3 + s\cos\phi\end{pmatrix}$$

være en parametrisering av $\Omega(x,r)$, med volumelement $s^2\sin\phi\ d\phi d\theta ds$. Vi beregner

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} u\ dx &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(u\Big(z(s,\theta,\phi)\Big)\Big)s^2\sin\phi\ d\phi d\theta ds\\
&= \int_0^r\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(u\Big(z(s,\theta,\phi)\Big)\Big)\sin\phi\ d\phi d\theta\right)s^2 ds\\
&= \int_0^r\Big(u(x)4\pi\Big)s^2\ ds \qquad \text{(fra forrige oppgave)}\\
&= \frac{4\pi r^3}{3}u(x).
\end{aligned}
$$

Oppgave 6 Vi må finne en A-ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$. Her har vi finfin eksamensmatematikk på sitt aller ypperste. La oss velge den ene basisvektoren til

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

og så beregne den andre. Vi må ha

$$\begin{aligned} 0 =& \mathbf{p}_1^T A \mathbf{p}_2 && (7) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{p}_2 && (8) \\ =& \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{p}_2 && (9) \end{aligned}$$

For eksempel

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

gjør jobben, og vi har nå at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Fremstår nok som litt corny dette her, men husk at indreprodukter kan være så mangt, jf
`https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_gradient_method`
eller
`https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials`
eller
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials`
eller
`https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials`

Oppgave 7 Differensiallikningssystemet er

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{12}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + N \tag{13}$$

Matrisen N er nilpotent, siden

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

og den kommuterer naturligvis med identitetsmatrisen, så vi kan bare skrive opp løsningen:

$$\mathbf{x}(t)\mathbf{x}_0 = e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{(I+N)t}\mathbf{x}_0 = e^{It}e^{Nt}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \tag{15}$$

Oppgave 8 Husk at arealet under $|\Psi(x,t)|^2$ må være 1, slik at

$$\lim_{x \to \pm\infty} \Psi(x,t) = 0.$$

Vi beregner

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Psi}(x,t)\overline{\Psi(x,t)} + \Psi(x,t)\overline{\dot{\Psi}(x,t)} \, dx \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi''(x,t)\overline{\Psi(x,t)} - \Psi(x,t)\overline{\Psi''(x,t)} \, dx \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Psi'(x,t)\overline{\Psi(x,t)} - \Psi(x,t)\overline{\Psi'(x,t)}\Big) \, dx \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\Big(\Psi'(x,t)\overline{\Psi(x,t)} - \Psi(x,t)\overline{\Psi'(x,t)}\Big)_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0
\end{aligned}$$

Dette betyr altså at normaliseringen ikke ødelegges over tid; har du normalisert løsningene for ett tidspunkt, vil de fortsette å være korrekt normaliserte også i fremtiden.