NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4121 Matematikk 4 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 06.08.2024

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Vi beregner

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden $A^T A$ har egenverdier 1 og 2, har AA^T egenverdier 1, 2 og 0. Siden $A^T A$ er diagonal er standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ egenvektorer, mens egenvektorene til AA^T er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2 Vi skriver først

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

slik at

$$\frac{e^z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

Singulariteten i origo er på innsiden av integrasjonkurven, og residyet er koeffisienten til $\frac{1}{z}$, som er 1. Vi får

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Oppgave 3 La oss begynne med å derivere $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Her må man holde tungen beint i munnen. Det er best å skrive

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{matrix} a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ a_{21}x_2x_1 + a_{12}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n \end{matrix}$$

Den deriverte av denne er rekkevektoren (så lang at den må gå over flere linjer)

$$\begin{aligned} \nabla\left(\mathbf{x}^T A\mathbf{x}\right) &= \begin{matrix} (2a_{11}x_1 + (a_{12}+a_{21})\,x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})\,x_n, \\ (a_{21}+a_{12})\,x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})\,x_n, \\ \vdots \\ (a_{n1}+a_{1n})\,x_1 + (a_{n2}+a_{2n})\,x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{matrix} \\ &= \mathbf{x}^T\left(A + A^T\right) \\ &= 2\mathbf{x}^T A \end{aligned}$$

Dersom $\mathbf{x}$ er en søylevektor, får vi altså

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A - \mathbf{b}^T = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T$$

som har entydig nullpunkt i $A^{-1}\mathbf{b}$ siden A er positivt definitt, og dermed er inverterbar siden ingen av egenverdiene kan være null. Hessematrisen blir bare A, og siden denne er positivt definitt må det kritiske punktet være et minimumspunkt.

Oppgave 4 Divergensteoremet sier at

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot dS$$

Dersom $F = \nabla u$, får vi

$$\int_\Omega \nabla \cdot \nabla u = \int_\Omega \Delta u$$

på den ene siden, og

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n\; dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\; dS$$

der n er enhetsnormalvektoren ut av $\partial\Omega$. Divergensteoremet kan altså skrives slik:

$$\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

Divergensteoremet gir

$$0 = \int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

som sier at dersom potensialet til et flytfelt er harmonisk, er utfluksen alltid null ut av områder.

Oppgave 5 Her er Maxwells likninger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

a) Tomt rom betyr at $\rho = 0$ og at $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, slik at vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Tidsinvarians betyr at ingenting endres med tiden, og da er alle tidsderiverte null, slik at vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Likningen $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ impliserer at $\mathbf{E}$ er gradienten til et skalarfelt:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Vi setter dette inn i den første likningen over, og får

$$-\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

slik at ϕ er harmonisk:

$$\Delta \phi = 0$$

b) Vi putter $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ inn i likningene, og får

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 &= 0\\
\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 &= c\mathbf{B}_0\\
\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 &= 0\\
c^2\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0 &= -c\mathbf{E}_0
\end{aligned}$$

Den første og den tredje likningen sier nå at $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ står normalt på $\mathbf{k}$, mens andre og fjerde likning sier begge at $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ og er ortogonale på hverandre.

Oppgave 6 Rotasjonen til $\mathbf{F}$ er

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

og tar vi dobbelrotasjonen, får vi

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \qquad \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \qquad - \qquad \Delta\mathbf{F}
\end{aligned}$$

Oppgave 7 Vi ganger likningen

$$\mathbf{x} = \sum_k \alpha_k \mathbf{p}_k.$$

med $\mathbf{p}_l^T A$ fra venstre og får

$$\mathbf{p}_l^T A\mathbf{x} = \sum_k \alpha_k \mathbf{p}_l^T A\mathbf{p}_k = \alpha_k \mathbf{p}_l^T A\mathbf{p}_k$$

og bruker at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, slik at

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{b}}{\mathbf{p}_k^T A\mathbf{p}_k} = \frac{(\mathbf{p}_k, \mathbf{b})}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)_A}.$$

Oppgave 8 Vi vet at

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x,0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$u_t(x,0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt + C$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt + C$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt - C$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int^{x+ct} g(t)\,dt - \int^{x-ct} g(t)\,dt\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

Merk at fra nest siste til siste linje spiller ikke nedre integrasjonsgrense noen rolle, det er derfor den er utelatt.