NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

# TMA4121 Matematikk 4 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

**Faglig kontakt under eksamen:** Morten Andreas Nome

**Tlf:** 90849783

**Eksamensdato:** 06.08.2024

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00 - 13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** E: Ingen hjelpemidler tillatt.

**Annen informasjon:**
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 2

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

| **Informasjon om trykking av eksamensoppgave** | |
|---|---|
| **Originalen er:** | |
| **1-sidig** ☐ | **2-sidig** ☒ |
| **sort/hvit** ☒ | **farger** ☐ |
| **skal ha flervalgskjema** ☐ | |

Dato Sign

**Oppgave 1** Finn svd-faktoriseringen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Oppgave 2** Regn ut

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\, dz,$$

der $\Gamma$ er enhetssirkelen i det komplekse planet.

**Oppgave 3** Vis at dersom $A$ er symmetrisk og positivt definitt, er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ minimumspunktet til

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}.$$

**Oppgave 4** La $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Vis at for en harmonisk funksjon er fluksen til gradientfeltet ut av $\Omega$ alltid lik null.

**Oppgave 5** Maxwells likninger er

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

**a)** Utled Laplaces likning fra antagelsen om statisk tilfelle og tomt rom.

**b)** Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

**Oppgave 6** Utled likningen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}.$$

**Oppgave 7** Finn den generelle løsningen til differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \quad\quad + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \quad\quad x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \quad\quad\quad\quad x_3 \end{aligned}$$

**Oppgave 8** Anta at du har en $A$-ortogonal basis $\{\mathbf{p}_k\}$ for $\mathbb{R}^n$, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og at

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{p}_k.$$

Utled at

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)_A}.$$

**Oppgave 9** Utled d'Alemberts løsning

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt$$

av bølgelikningen på $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x).$$