Oppgave 1

a) Likningen for tangentplanet til f i punktet $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ er

$$z = f'(y)(x - y) + f(y)$$

Vi partiellderiverer:

$$f'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2 - 3, 2x_2 + x_1 - 3),$$

slik at

$$f'\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (4, 5).$$

Likningen for tangentplanet blir

$$z = f'(2,3)\begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} + f(2,3) = 4(x_1 - 2) + 5(x_2 - 3) + 7.$$

b) Vi beregner

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f &= \int_0^3 \int_0^{4x_1/3} x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \; dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^3 x_1^2 (4x_1/3) + \frac{1}{3}(4x_1/3)^3 + \frac{1}{2}x_1 (4x_1/3)^2 - 3x_1 (4x_1/3) - \frac{3}{2}(4x_1/3)^2 + 3(4x_1/3) \; dx_1 \\
&= \int_0^3 \frac{4}{3}x_1^3 + \frac{64}{81}x_1^3 + \frac{8}{9}x_1^3 - 4x_1^2 - \frac{8}{3}x_1^2 + 4x_1 \; dx_1 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3^4 + \frac{16}{81} \cdot 3^4 + \frac{2}{9} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{8}{9} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 \\
&= 27 + 16 + 18 - 36 - 24 + 18 = 19
\end{aligned}$$

c) Gradienten til f er

$$f'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2 - 3, 2x_2 + x_1 - 3),$$

og setter vi denne lik null, får vi likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dette systemet har entydig løsning $x_1 = x_2 = 1$, og følgelig har f et entydig kritisk punkt. Hessematrisen er

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og den har egenverdier 3 og 1, siden det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) - 1$$

så $(1,1)^T$ må være et bunnpunkt.

d) Det kritiske punktet til f har funksjonsverdi

$$f(1,1) = 0.$$

La oss sjekke randen. På de delene av randen som ligger på x_1- og x_2-aksen, er det enklest å sette inn henholdsvis $x_2 = 0$ og $x_1 = 3$. På x_1-aksen får vi

$$f(x_1, 0) = x_1^2 - 3x_1 + 3,$$

som har bunnpunkt i $x_1 = 3/2$ og toppunkter i $x_1 = 0$ og $x_1 = 3$. Likeledes har

$$f(3, x_2) = 9 + x_2^2 + 3x_2 - 9 - 3x_2 + 3 = x_2^2 + 3$$

bunnpunkt i $x_2 = 0$ og toppunkt i $x_2 = 4$. På den skrå delen av randen er det minst jobb å bruke Lagranges multiplikatormetode. Punktene på denne delen av randen tilfredsstiller

$$g(x) = x_1 - 4x_2/3 = 0,$$

og gradienten til $g' = (1, -4/3)$. Vi setter opp lagrangelikningene

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3 =& \lambda \\ 2x_2 + x_1 - 3 =& 4\lambda/3 \\ x_1 - 4x_2/3 =& 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

om du vil, som har løsning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Dette punktet ligger ikke på randen til Ω, så da er det bare endepunktene $(0,0)^T$ og $(3,4)^T$ som gjelder. Vi sjekker nå alle funksjonsverdier:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 0 \\ f(0,0) &= 3 \\ f(3/2,0) &= 3/4 \\ f(3,0) &= 3 \\ f(3,4) &= 19 \end{aligned}$$

Den minste verdien er altså 0 og den største 19.

Oppgave 2 La $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Gradienten til V er

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Vi beregner først

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right)$$

og så legger vi disse sammen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_1^2}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_2^2}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_3^2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right) \\ &= \frac{3q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) = 0 \end{aligned}$$

Oppgave 3 La oss anta at du har en forklaringsvariabel x og responsvariabel y, og et datasett med masse par (x_k, y_k). Vi tar summen av de kvadrerte avstandene mellom en rett linje $y = ax + b$ og datasettets responsvariabel:

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$$

og så finne a og b som minimerer denne. Siden f åpenbart er en positiv annengradsfunksjon, har vi god tro på at et eventuelt kritisk punkt må være et minimum.

Vi partiellderiverer med hensyn på a og b:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)\, x_k \\ &= 2\left(a\|\mathbf{x}\|^2 + bn\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b} &= 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k) \\ &= 2\left(an\bar{\mathbf{x}} + bn - n\bar{\mathbf{y}}\right) \end{aligned}$$

Setter vi disse lik null, får vi det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} a\|\mathbf{x}\|^2 + bn\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\ a\bar{\mathbf{x}} + b &= \bar{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

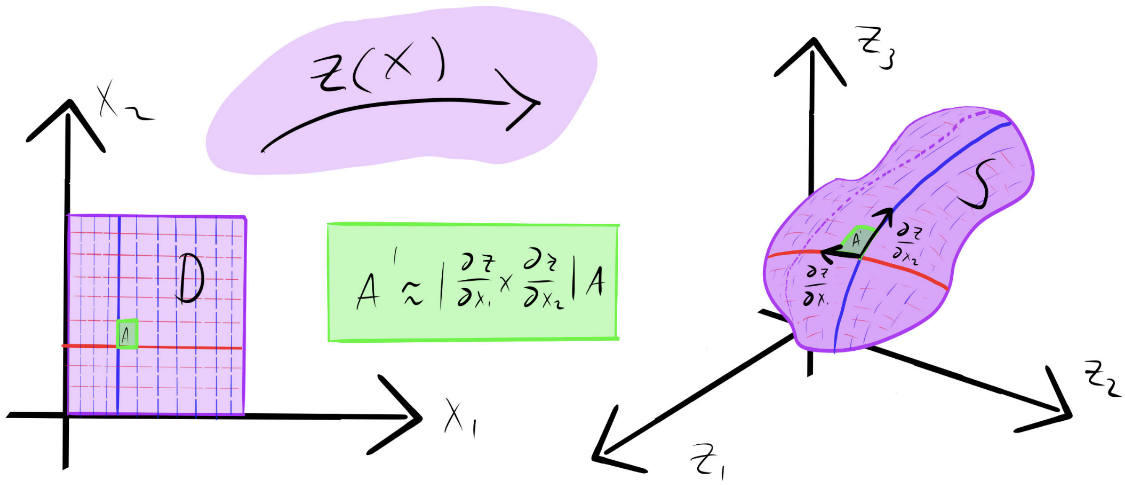
som har løsning

$$a = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{x}\|^2 - n\left(\bar{\mathbf{x}}\right)^2}$$

og

$$b = \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{x}\|^2 - n\left(\bar{\mathbf{x}}\right)^2} = \frac{\bar{\mathbf{y}}\|\mathbf{x}\|^2 - \bar{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)}{\|\mathbf{x}\|^2 - n\left(\bar{\mathbf{x}}\right)^2}.$$

Oppgave 4 La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i D. Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene i D blir kurver som ligger på flaten $\mathcal{S}$ i figuren til høyre, og at tangentvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$.

Det neste man må forstå er at hvert av de små rektanglene i D blir en liten bit av $\mathcal{S}$ gjennom transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Disse små bitene av $\mathcal{S}$ er ikke parallellogrammer, men om inndelingen av D i rektangler er fin nok, vil

$$A' \approx A \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|$$

være en god approksimasjon av arealet A' til flatebiten på $\mathcal{S}$ gitt arealet A til den korresponderende rektangelbiten i D. Dersom vi ønsker å finne arealet til flaten $\mathcal{S}$, må vi altså summere opp alle disse små arealene:

$$\text{arealet til } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} ds = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Parametriseringen til et kuleskall med radius R er

$$\mathbf{z}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\phi \end{pmatrix}$$

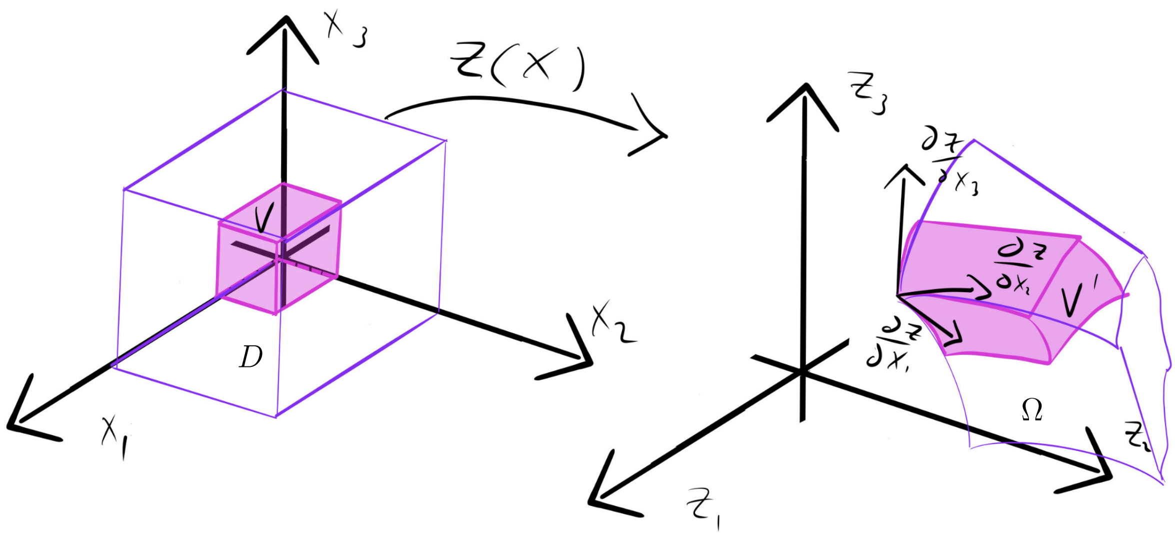
slik at flateelementet blir

$$\left|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}\right| = \left| R^2 \sin\phi \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \right| = R^2 \sin\phi.$$

(Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra.) Nå er det bare å integrere:

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\theta d\phi = 4\pi R^2.$$

Oppgave 5 La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i området D i figuren til venstre. Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene til venstre blir kurver som sitter i volumet Ω i figuren til høyre, og at tangentvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$.

Det neste man må forstå er at små rektangulære kuber D blir små biter av Ω til høyre gjennom transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Disse små bitene i Ω er ikke parallellogrammer, men om inndelingen i rektangler i D er fin nok, vil

$$V' \approx V \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right|$$

være en god approksimasjon av volumet V' til biten av Ω gitt volumet V til den korresponderende rektangulære biten i D. Dersom vi ønsker å finne volumet til Ω, må vi altså summere opp alle disse små volumene:

$$\text{volumet til } \Omega = \iiint_\Omega d\mathbf{z} = \iiint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| d\mathbf{x}$$

Kulekoordinater er gitt ved

$$\mathbf{z}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}. \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\phi \end{pmatrix}$$

slik at flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \left(r^2 \sin\phi \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \right) \right| = r^2 \sin\phi.$$

(Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra.) Nå er det bare å integrere:

$$\iiint_\Omega d\mathbf{z} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi \; d\theta d\phi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Hvis du tenker på integranden som massetetthet (kilo/kubikkmeter) og Ω som en klump med masse, er trippelintegralet f over Ω den totale massen til klumpen. Massesenteret $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ er gitt ved

$$m_1 = \frac{\iiint_\Omega z_1 f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}, \qquad m_2 = \frac{\iiint_\Omega z_2 f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}, \qquad m_3 = \frac{\iiint_\Omega z_3 f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{z}) \; d\mathbf{z}}.$$

Hvis vi legger halvkulen slik at den flate siden hviler på x_1x_2-planet, ser vi av symmetri at massesenteret må ligge et sted på x_3-aksen. Halvkulen i kulekoordinater vil følgelig beskrives av ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \end{aligned}$$

Vi vet også at massetettheten f er konstant, så denne kansellerer i uttrykkene for massesenter. Vi beregner derfor

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega z_3 \, d\mathbf{z} = &\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\phi \sin\phi \; d\phi d\theta dr \\ =&\frac{1}{2}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\phi \; d\phi d\theta dr \\ =&\frac{1}{2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \; d\theta dr \\ =&\pi \int_0^R r^3 \; dr = \pi \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

Volumet til en halvkule er $2\pi R^3/3$, så vi kan nå beregne

$$m_3 = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3R}{8}$$

slik at massesenteret sitter i $(0, 0, 3R/8)$

Oppgave 6 Transport av varmeenergi er for mange materialer proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kalles Fouriers lov, og skrives

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

der κ er den termiske konduktiviteten, og $\mathbf{q}$ er varmeflukstettheten, målt i watt per kvadratmeter. Endringen i varmeenergi i Ω skyldes enten varme som produseres inne i Ω (tenk at det står et stearinlys og brenner inne i Ω), eller varme som slipper inn og ut gjennom randen $\partial\Omega$.

La oss tenke at temperaturen er gitt ved funksjonen $T(\mathbf{x}, t)$, der $\mathbf{x}$ er de romlige koordinatene og t er tidspunktet. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Tidsendringen i varmeenergien i Ω er

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c \iiint_\Omega T(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x}\right) = \rho c \iiint_\Omega T_t(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x}$$

der massetettheten ρ og den spesifikke varmekapasiteten c er antatt konstante. Det er også antatt at T er glatt nok til at vi bare kan slenge tidsderivasjonen inn under integraltegnet. Dersom vi antar at κ er konstant og at det ikke produseres varme i Ω, må

$$\begin{aligned}-\rho c \iiint_\Omega T_t \, d\mathbf{x} &= \iint_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot dS \\ &= \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{q} \, d\mathbf{x} \\ &= -\kappa \iiint_\Omega \nabla \cdot \nabla T \, d\mathbf{x} = -\kappa \iiint_\Omega \Delta T \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

eller

$$\rho c \iiint_\Omega T_t \, d\mathbf{x} = \kappa \iiint_\Omega \Delta T \, d\mathbf{x}.$$

Dersom dette gjelder for et tilfeldig valgt område Ω, bør integrandene være like:

$$\rho c u_t = \kappa \Delta u$$

og det er vanlig å samle den spesifikke varmekapasiteten, massetettheten og den termiske konduktiviteten i en konstant

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$$

som kalles den termiske diffusiviteten. Likningen

$$T_t = \alpha \Delta T$$

kalles varmelikningen eller diffusjonslikningen.

Oppgave 7 Det første vi må gjøre, er å ha en parametrisering for enhetssirkelen i det komplekse planet:

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \qquad z'(\theta) = ie^{it}.$$

Så er det bare å integrere:

$$\int_\Gamma z^n \, dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} ie^{i\theta} \, d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} \, d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$