Oppgave 1 La $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3.$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 0)$ og $(3, 4)$.

a) Finn tangentplanet til f i punktet $(2, 3)$.

b) Finn volumet under grafen til f.

c) Finn og klassifiser det kritiske punktet til f.

d) Finn den største og minste verdien til f på Ω.

Oppgave 2 Spenningen til en punktladning q er gitt ved

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}}$$

Vis at denne tilfredsstiller Laplaces likning

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0$$

så lenge $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Oppgave 3 Utled uttrykket for det rettlinjede regresjonspolynomet

$$y = \beta_1 x + \beta_0$$

ved minste kvadraters metode.

Oppgave 4 En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

der $D \subset \mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| \, d\mathbf{x}$$

Vis at overflatearealet til en kule med radius r er $A = 4\pi r^2$.

Oppgave 5 La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \to \mathbf{R}^3$, der $D \subset \mathbb{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom $\mathbf{z}$. Forklar at volumet til Ω er

$$\iiint_\Omega d\mathbf{z} = \iiint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| d\mathbf{x}.$$

Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3} r^3$ og finn massesenteret til en halvkule med konstant massetetthet.

Oppgave 6 Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

Oppgave 7 Regn ut

$$\int_\Gamma z^n \, dz$$

for alle $n \in \mathbb{C}$, der Γ er enhetssirkelen i det komplekse planet.