Oppgave 1

a) Når matrisen er så pen som dette, er det lett å finne egenvektorene ved prøving og feiling. Vi beregner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det finnes altså to egenverdier, begge med multiplisitet 2, og et fullt sett med ortogonale egenvektorer. Merk at egenvektorene ikke er entydige.

b) Vi beregner

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

som har en dobbel egenverdi 2. Alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ er egenvektorer, så vi kan like gjerne ta identitetsmatrisen som egenvektormatrise. Matrien A^TA analyserte vi i forrige oppgave, så da er det bare å skrive opp svd-faktoriseringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Merk at svd-faktoriseringen ikke er entydig siden egenvektorene ikke er entydige.

Oppgave 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Oppgave 3 For å modellere induktansen på ledningene og kapasitansen mellom dem, tenker vi at det sitter masse av små kondensatorer og spoler bortetter ledningsparet, slik som på figuren. Det kan sitte en last i enden av ledningsparet, men vi antar ingen motstand i selve ledningene. Spenning og strøm vil variere på linjene, og vi tenker på dem som funksjoner av to variable $v(x,t)$ og $i(x,t)$.

La L være ledningens induktans per meter, slik at induktansen til den lille spolen blir Lh. Spenningen i punktet $x+h$ er spenningen i punktet x minus det som går tapt over spolen:

$$v(x+h,t) = v(x,t) - Lh\frac{\partial i}{\partial t}$$

La likeledes C være kapasitans per meter, slik at kapasitansen over den lille kondensatoren blir Ch. Da er strømmen i $x+h$ lik strømmen i x minus det som det lekker ned via kondensatoren:

$$i(x+h,t) = i(x,t) - Ch\frac{\partial v}{\partial t}$$

Dersom vi reorganiserer disse likningene og lar $h \to 0$, får vi **telegraflikningene**:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Oppgave 4 En ortonormal basis for rommet utspent av de tre vektorene er

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nå bare prikke vektoren $(-1,0,1,0)^T$ med disse tre,

$$(-1,0,1,0)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}=0 \qquad (-1,0,1,0)\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}=-1 \qquad (-1,0,1,0)\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}=0$$

slik at den ortogonale projeksjonen blir

$$0\cdot\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}.$$

Oppgave 5 Differensiallikningssystemet er

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}$$

der

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=I+N$$

Matrisen N er nilpotent, siden

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

og

$$N^3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Siden den kommuterer med identitetsmatrisen, så vi kan skrive opp løsningen:

$$\mathbf{x}(t)\mathbf{x}_0=e^{At}\mathbf{x}_0=e^{(I+N)t}\mathbf{x}_0=e^{It}e^{Nt}\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t&t+t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\mathbf{x}_0$$

Oppgave 6 En projeksjon er en lineæroperator som tilfredsstiller $P = P^2$. Vi beregner

$$\left(I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)\left(I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) = I - \frac{2}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T,$$

så svaret er ja.

Oppgave 7

a) La oss studere den kvadratiske formen $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$. Vi ser først at

$$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \lambda\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2.$$

Konjugerer vi likningen $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$ og bruker at $A = A^*$, får vi

$$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^* A^*\mathbf{x} = \lambda^*\|\mathbf{x}\|^2.$$

Siden $\|\mathbf{x}\|^2$ er et reelt tall og $\lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda^*\|\mathbf{x}\|^2$, må λ være et reelt tall.

b) La $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være egenvektorer med egenverdier $\lambda \neq \mu$. Husk at både λ og μ er reelle. Vi beregner

$$\mu\mathbf{x}^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mu\mathbf{y} = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = \mathbf{x}^* A^*\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^*\,\mathbf{y} = (\lambda\mathbf{x})^*\,\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{y} \tag{1}$$

slik at $(\lambda - \mu)\,\mathbf{x}^*\mathbf{y} = 0$. En av faktorene på venstresiden må være null, og det er ikke $\lambda - \mu$, så da må $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være ortogonale.

Oppgave 8 Min påstand er at

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Velg $\epsilon > 0$. Siden sinusfunksjonen alltid er mindre enn én i absoluttverdi, kan vi sette opp ulikheten

$$\left|\, x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \,\right| = \left|\, x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \,\right| \leq |x|\,.$$

Hvis vi velger $\delta = \epsilon$ og krever at $|x| < \delta$, vil

$$\left|\, x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \,\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

og derfor er grenseverdien 0.