NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 06.08.2024

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

```
import numpy as np

#t-aksen
T=20
N=200
h=T/N
t=np.linspace(0,T,N+1)


#fysiske konstanter
#m er massen, g ertyngdeakselerasjonen og l lengden
m=1
g=9.8214675
l=1

#q er vinkel og p er vinkelhastighet
q=np.zeros(N+1)
p=np.zeros(N+1)
q[0]=1
p[0]=0

for k in range(N):

    q[k+1]=q[k]+h*p[k]
    p[k+1]=p[k]-h*np.sin(q[k])
```

Oppgave 2 Først finner vi egenvektorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1, \tag{2}$$

som har røtter $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$. Vi beregner så

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

og

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Den generelle løsningen er

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

og krever vi $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, får vi likningssystemet

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

som gir $c_1 = c_2 = 1/2$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \tag{9}$$

Oppgave 3 Her er den vakreste løsningen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty
\end{aligned}$$

Oppgave 4 Vi gausseliminerer litt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolonnene er lineært avhengige, og følgelig er determinanten null.

Oppgave 5 Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er konvergent dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Velg $\epsilon > 0$. Jeg påstår at $n > 1/\epsilon$ gjør jobben, for

$$\begin{aligned} 1/\epsilon < n &\Longrightarrow 1 < n\epsilon \\ &\Longrightarrow n + 1 < n\epsilon + n \\ &\Longrightarrow \frac{n+1}{n} < \epsilon + 1 \\ &\Longrightarrow \frac{n+1}{n} - 1 < \epsilon \\ &\Longrightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Oppgave 6 Nei. De to første kolonnene er lineært uavhengige, så de kan brukes til å nå frem til alle punkter i $\mathbb{R}^2$.
Og ja. Et vilkårlig punkt med førstekoordinat forskjellig fra null er ikke mulig å skrive som en lineærkombinasjon av kolonnene i A.

Oppgave 7 La $z = a + bi$. Vi beregner

$$|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Oppgave 8 Hvis du har studert løsningsforslaget til ordinær eksamen meget nøye, husker du kanskje at polynomet

$$p(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 6$$

går gjennom de fire siste punktene i listen. Det er også klart at $p(0) = 6$, så vi er i mål. Om man ikke ser dette, kan man ta utgangspunkt i tredjegradspolynomet

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

og løse likningssystemet

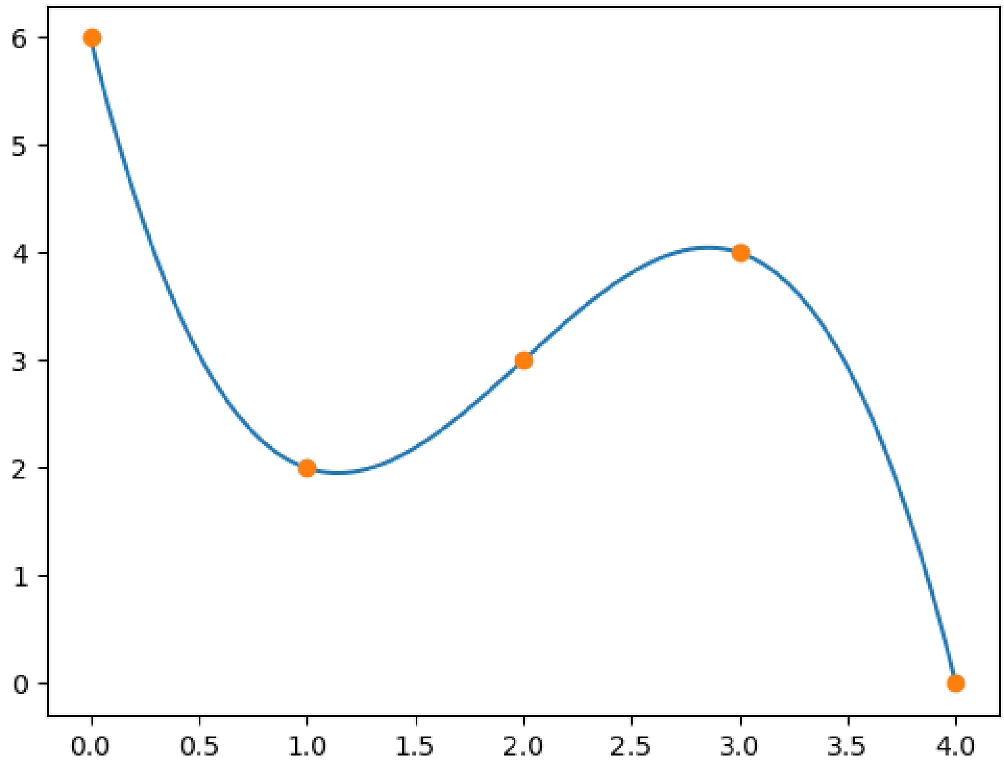
$$\begin{aligned} p(0) &= 6 \\ p(1) &= 2 \\ p(2) &= 3 \\ p(3) &= 4 \\ p(4) &= 0 \end{aligned}$$

for koeffisientene a_3, a_2, a_1 og a_0:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 26 & 8 & 2 & 0 & 2 \\ 63 & 15 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 6 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right.$$

Dette er fem likninger, men de er konsistente med hverandre, så entydig løsning er

$$p(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 6.$$



Oppgave 9 Differensiallikningen er

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

der m er massen og k er fjærstivheten. Initialkravene er $x(0) = l$ (der l er hvor langt klossen er dradd ut) og $\dot{x}(0) = 0$. Løsningen er

$$x(t) = l \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Alle barn i barnehagen vet at perioden til denne bevegelsen er uavhengig av l, og skjønner at klossen har nådd tilbake til punktet den ble sluppet fra når

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t = 2\pi$$

eller

$$k = \frac{4\pi^2 m}{t^2}$$

Setter vi inn $m = 0.25$ kilo og $t = 1$ sekund i denne, får vi at $k = \pi^2$ kilo per sekund. (Eller Newton per meter om du vil.)

Oppgave 10 Vi setter $-x^2/2$ inn for x i rekken for eksponensialfunksjonen:

$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

Det er greit å integrere denne ledd for ledd:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$