NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 21.12.2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La oss anta at

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

der m og n er heltall med ingen felles faktorer, slik at brøken er maksimalt forkortet. Vi ganger nå hele likningen med n, og kvadrerer, slik at vi får

$$3n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være delelig med 3. Men dersom m^2 er delelig med 3, må m være delelig med 3 (siden 3 er et primtall), og dette betyr at m^2 må være delelig med 9. Dette betyr at $m^2/3$ må være delelig med 3, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{3},$$

ser vi at n^2 må være delelig med 3, og da må n være delelig med 3. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 3 må være en felles faktor allikevel.

Oppgave 2 Her er det nok mest praktisk å bruke lagrangepolynomer, og skrive

$$\begin{aligned} p(x) =& 2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &+3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &+4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &+0 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 6. \end{aligned}$$

Man kan også komme frem til korrekt svar ved å sette

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

og løse likningssystemet

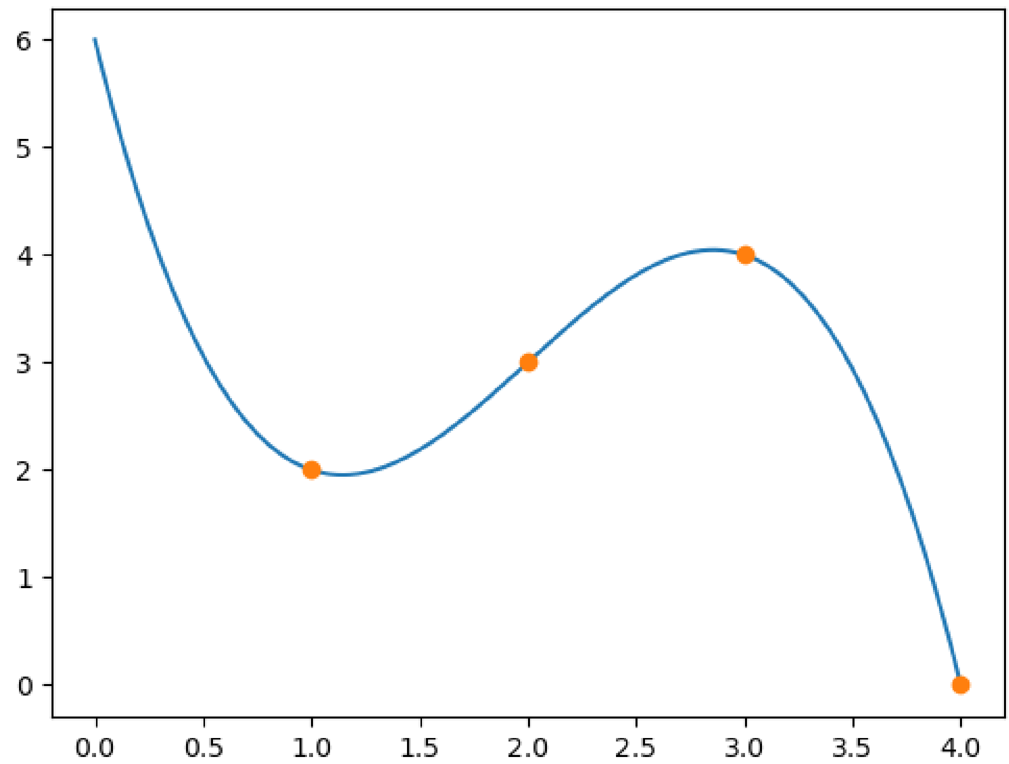
$$\begin{aligned} p(1) &= 2 \\ p(2) &= 3 \\ p(3) &= 4 \\ p(4) &= 0 \end{aligned}$$

for koeffisientene a_3, a_2, a_1 og a_0:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 26 & 8 & 2 & 0 & 2 \\ 63 & 15 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 6 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right.$$

slik at

$$p(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 6$$



Oppgave 3 En funksjon f er injektiv dersom $f(x) = f(y)$ impliserer at $x = y$. Derfor er funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

ikke injektiv; for eksempel er $f(1,2) = f(2,1)$. Men $(1,2) \neq (2,1)$! En funksjon som ikke injektiv, kan heller ikke ha noen invers.

Oppgave 4 Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

som forteller oss at den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Den partikulære løsningen er helt klart

$$x_p(t) = 1,$$

slik at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 1.$$

Initialkravet $x(0) = 0$ gir

$$c_1 + 1 = 0$$

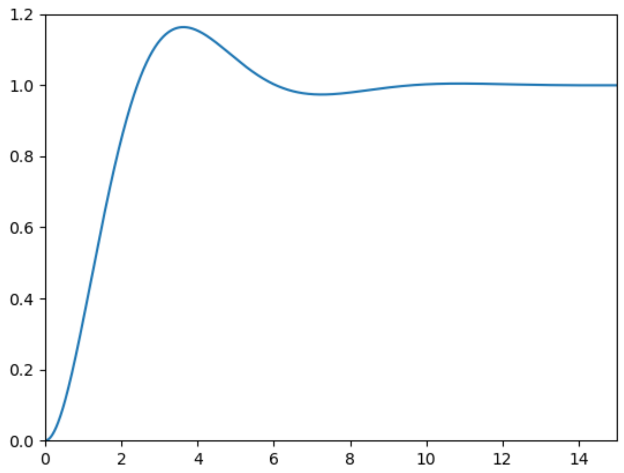
slik at $c_1 = -1$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir

$$\frac{1}{2} + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

slik at $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Løsningen er altså

$$x(t) = 1 - e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Denne kalles **sprangresponsen**, og den skal vi lære mer om etter jul.



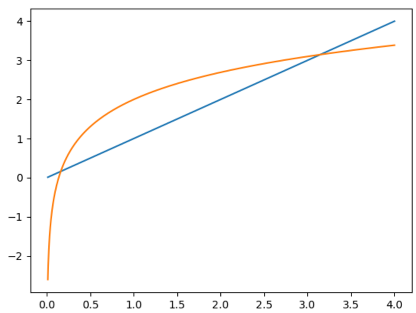
Oppgave 5

```
import numpy as np

x=0.1

for i in range(100):
    x=x-(2+np.log(x)-x)/(1/x-1)
print(x)
```

Siden linjen $y = x - 1$ tangerer logaritmefunksjonen i $x = 0$, og $y = x - 2$ sitter et knepp lenger ned og logaritmefunksjonen alltid er konkav, må likningen $x = 2 + \ln x$ ha to løsninger. Koden over finner begge, alt etter hvor man starter iterasjonene.



Oppgave 6 Newtons andre lov er $F = ma$. Kraften er $-mg\sin\theta$ og akselerasjonen er $a = l\ddot{\theta}$, slik at Newtons andre lov blir

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

eller

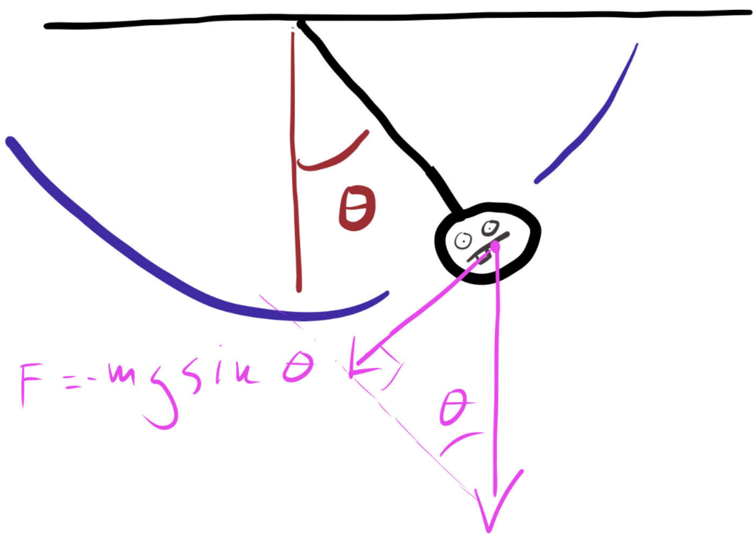
$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

om du vil. Merk at massen til pendelen ikke har noe å si. Hvis vi ganger opp med $ml\dot{\theta}$, får vi

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

som integreres til

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C.$$



Oppgave 7 Vi antar at

$$\dot{T} = \alpha\,(10 - T) \qquad T(0) = 37,$$

der T er grevlingens temperatur. Løsningen er

$$T(t) = 10 + 27e^{-\alpha t},$$

og informasjonen om at $T(10) = 27$ gir

$$27 = T(10) = 10 + 27e^{-10\alpha}$$

slik at

$$\alpha = -\ln\left(\frac{17}{27}\right)/10.$$

Temperaturen etter femten timer blir følgelig

$$T(15) = 10 + 27e^{15\cdot\ln\left(\frac{17}{27}\right)/10} = 10 + 27 \cdot \left(\frac{17}{27}\right)^{3/2}$$

grader.

Oppgave 8 Det karakteristiske polynomet blir

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(1+\lambda\right)^2,$$

som gir en enkel egenverdi $\lambda = 0$ og en dobbel egenverdi $\lambda = -1$. Egenretningen til 0 er helt klart

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

på grunn av likningene $x_1 = x_2$ og $x_2 = x_3$. For å finne egenretninger til $\lambda = -1$, er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

impliserer at $x_1 = x_2 = 0$, slik at egenretningen blir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Denne egenverdien har mulitplisitet to, men kun én egenretning. Defekt!

Oppgave 9 Det andre ordens maclaurinpolynomet til cosinusfunksjonen er $p(x) = 1 - x^2/2$. Vi setter dette inn i likningen $x = \cos x$ og får

$$x = 1 - x^2/2.$$

Denne likningen har løsningene $-1 \pm \sqrt{3}$. Den positive av disse

$$\sqrt{3} - 1$$

er en approksimasjon til løsningen. (Den negative er vel forsåvidt også en approksimasjon til løsningen, men det er også $x = -10000$ eller $x = 10\pi$, uten at noen noensinne ville ta disse approksimasjonene seriøst.)

Oppgave 10 Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er konvergent dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

En rekke er konvergent dersom partialsummene danner en konvergent følge. Partialsummene til den geometriske rekken er

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & n \text{ partall} \\ 0 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

Anta at den geometriske rekken konvergerer til L når $x = -1$. Velg $\epsilon < \frac{1}{2}$ og N slik at du tror $|x_n - L| < \epsilon$ for alle $n > N$. Hvis du nå påstår at du har har en k slik at $|x_k - L| < \epsilon$, kan jeg garantere med ett hundre prosent sikkerhet at $|x_{k+1} - L| > \epsilon$, og følgelig kan ikke L være noen grenseverdi. Dette kan jeg kontre med uansett hvilken L du velger, så følgen kan ikke være konvergent.

Her illustrasjon. Partialsummene til geometrisk rekke for $x = -1$ til venstre, og en konvergent rekke til høyre.