

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4121 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 02.06.2026

Eksamenstid (fra–til): 15:00 - 19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Planet som går gjennom $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 2)$ er $x_3 = 2(1 - x_1 - x_2)$, og dette skjærer x_1x_2 -planet i linjen $x_2 = 1 - x_1$. Vi beregner

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{2(1-x_1-x_2)} 2 - x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 2

- a) Her er det enklest å bruke Stokes' teorem. Siden Σ er grafen til et skalarfelt av to variable blir parametriseringen

$$h(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

med oppovernormalvektor

$$e_n = \frac{\partial h}{\partial x_1} \times \frac{\partial h}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at fluksen blir

$$\int_{\Sigma} \nabla \times g \cdot dS = \int_D (0, 0, 2) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 2\pi.$$

- b) Siden $\nabla \cdot g = 2$ gir divergensteoremet

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot g = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{s^2 \cos(2\theta)+1} s \, dz d\theta ds = 2\pi.$$

Siden f er harmonisk og D er en sirkelskive med radius 1 er det trivielt å beregne volumet til Ω slik:

$$\pi f(0) = \pi.$$

Oppgave 3 La $y = (1, 1, 1)^T / \sqrt{3}$ og

$$S(y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

og $\theta = \pi/3$. Rodrigues formel gir

$$\begin{aligned} e^{\theta S(y)} &= I + S(y) \sin \theta + S^2(y)((1 - \cos \theta)) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Med $\theta = -\pi/3$ får du den transponerte av denne, som også er fullgodt svar - oppgaven er spesifiserer ikke rotasjonsretning.

Oppgave 4 Det elektriske feltet fra en punktladning q plassert i origo er

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3},$$

og jacobimatrisen er

$$\nabla E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix}.$$

Dersom $x \neq 0$, er

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{|x|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_k^2}{|x|^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x|^3} - \frac{3}{|x|^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_3x_2}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_2}{|x|^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Oppgave 5 Vi skriver

$$\partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

for partiellderivert og

$$\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

for liggende gradient. La $y = Ax$ der $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, og la $v(x) = u(Ax) = u(y)$, slik at

$$v'(x) = u'(Ax)A.$$

Skrevet opp kun med operatornotasjon blir dette

$$\partial_x = \partial_y A,$$

og transponerer vi, får vi

$$\nabla_x = A^T \nabla_y.$$

Laplaceoperatoren er

$$\Delta_x = \partial_x \nabla_x,$$

og setter vi inn kjerneregelen, får vi

$$\Delta_x = \partial_y A A^T \nabla_y.$$

Dersom $AA^T = A^T A = I$, får vi

$$\Delta_x = \partial_y \nabla_y = \Delta_y,$$

så disse operatorene gir samme resultat etter rotasjon av koordinater.

Oppgave 6 La

$$a = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

Dersom

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ser vi at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n+1} \right) = a.$$

Oppgave 7 Vi deriverer den første likningen og får

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

Oppgave 8 $\rho(x, t) = e^{-(x-t)^2/2}.$

Oppgave 9 La e_{nk} være komponent k i enhetsutnormalvektoren e_n til Ω . For vektorfeltet

$$f = u e_k$$

blir divergensteoremet

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int_{\Omega} \nabla \cdot f = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, dS = \int_{\partial\Omega} (u e_k) \cdot e_n \, dS = \int_{\partial\Omega} u e_{nk} \, dS.$$