

Oppgave 1 En ting har massetetthet gitt ved

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = 2 - x_3$$

og form som et tetraeder med hjørner i $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ og $(0, 0, 2)^T$. Finn massen.

Oppgave 2 La D være enhetssirkelskiven i x_1x_2 -planet og la Σ være grafen til $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 1$$

og la Ω være det sylindriske området i $\mathbb{R}^3$ som ligger over D og under Σ . Et kraftfelt $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 2x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn arbeidet g gjør på en partikkel som reiser én gang rundt $\partial\Sigma$.

b) Finn fluksen til g ut av Ω .

Oppgave 3 Finn en matrise som roterer punkter $\pi/3$ radianer om $(1, 1, 1)^T$.

Oppgave 4 Regn ut divergens og rotasjon til det elektriske feltet fra en punktladning i origo.

Oppgave 5 Vis at laplaceoperatoren

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

er rotasjonsinvariant.

Oppgave 6 La $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ha en enkel pol i z_0 . Vis at

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Oppgave 7 Utled kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$$

fra Maxwells lover.

Oppgave 8 La $\rho : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ være en ukjent tetthet. Finn løsningen til transportlikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

som tilfredsstiller $\rho(x, 0) = e^{-x^2/2}$.

Oppgave 9 La $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ være en glatt funksjon og la $\Omega \in \mathbb{R}^3$ være et enkeltsammenhengende område med glatt rand. Bruk divergensteoremet til å utlede formelen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} u e_{nk} dS$$

der e_{nk} er komponent k i enhetsutnormalvektoren til $\partial\Omega$.

Formler:

Gradient i sylinderkoordinater:

$$\nabla = e_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{e_\theta}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Gradient i kulekoordinater:

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Laplaceoperator i sylinderkoordinater:

$$\Delta = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Laplaceoperator i kulekoordinater:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Maxwells likninger på differensialform:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\dot{B}$$

$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \dot{E}$$

Elektrisk felt fra punktladning i origo:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$