

Oppgave 1 Planet som går gjennom $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ og $(0, 0, 2)$ er $x_3 = 2 - x_1 - x_2$, og dette skjærer x_1x_2 -planet i linjen $x_2 = 2 - x_1$. Vi beregner

$$\int_0^2 \int_0^{2-x_1} \int_0^{2-x_1-x_2} x_1 dx_3 dx_2 dx_1 = \frac{2}{3}.$$

De andre beregningene gir samme verdi, og tetraederets volum er $4/3$, så masse-senteret er

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(1, 1, 1)^T.$$

Oppgave 2

a) Vi setter

$$4 - 3x_1^2 - x_2^2 = x_1^2 + 3x_2^2$$

og finner at

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

så projeksjonen av volumet ned i x_1x_2 -planet er enhetssirkelskiven. La oss kalle denne D . Volumet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} &= \int_D \int_{x_1^2+3x_2^2}^{4-3x_1^2-x_2^2} dx_3 dS \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s^2)s ds d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Divergensen er null, så fluksen ut av Ω blir null.

c) Her er det enklest å bruke Stokes' teorem og finne linjeintegralet til f rundt skjæringskurven mellom de to flatene. Parametriseringen for skjæringskurven er

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

der $\theta \in [0, 2\pi]$, så vi får

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \nabla \times f dS &= \int_{\partial\Sigma} f \cdot ds \\ &= \int_0^{2\pi} (2, 0, \sin \theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 2 \sin 2\theta \end{pmatrix} d\theta = 0 \end{aligned}$$

siden $\sin \theta$ og $\sin 2\theta$ er ortogonale på $[0, 2\pi]$.

Oppgave 3 Her er det bare å brette opp ermene og regne i vei:

Vi tar rotasjonen først,

$$\nabla \times g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

og så divergensen av denne:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times g) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oppgave 4 Her er det enklest å delbrøksoppspalte

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1 - i} = \frac{1}{z - \sqrt{1+i}} + \frac{1}{z + \sqrt{1+i}}$$

og se at vi har to enkle poler innenfor Γ , så residyteoremet gir

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i(1 + 1) = 4\pi i.$$

Oppgave 5 Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x + ct) + \psi''(x - ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \phi''(x + ct) + c^2 \psi''(x - ct).$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x, 0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$\dot{u}(x, 0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \left(\int_0^x g(s) \, ds + \phi(0) - \psi(0) \right).$$

Vi har nå et lineært 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ . Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \left(\int_0^x g(s) \, ds + \phi(0) - \psi(0) \right)$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \left(\int_0^x g(s) \, ds + \phi(0) - \psi(0) \right)$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(s) \, ds - \int_0^{x-ct} g(s) \, ds \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds \end{aligned}$$

Oppgave 6 La oss først sette uttrykkene inn i Maxwells lover og få

$$E_0 \cdot k = 0$$

$$B_0 \cdot k = 0$$

$$E_0 \times k = cB_0$$

$$cB_0 \times k = -E_0$$

og nå er det rimelig klart at alle disse vektorene er ortogonale på hverandre.