NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4121 Matematikk 4 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 14.05.2025

Eksamenstid (fra–til): 15:00 - 19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi beregner

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 + 0 + 0 = 0$$

og

$$\begin{aligned}\nabla \times f &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) e_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) e_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) e_3 \\ &= -e_1 - e_2 - e_3.\end{aligned}$$

b) Vi må ha g slik at $\nabla \times g = f$. Dette gir likningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} &= x_2 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} &= x_3 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= x_1\end{aligned}$$

og vi ser lett at for eksempel $g(x) = \frac{1}{2}\left(x_3^2, x_1^2, x_2^2\right)$ gjør susen, siden $\nabla \cdot g = 0$.

Oppgave 2

a) Hvis v er en konstant, sier transportlikningen

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

at den totalderiverte til ρ skal være null langs kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

siden

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Med andre ord passer funksjoner på formen

$$\rho(x, t) = h(x - vt)$$

i likningen så lenge h er deriverbar. Derfor er også

$$\rho(x, t) = g(x - vt)$$

en løsning, og denne tilfredsstiller også initialkravet.

b) La oss undersøke hvordan løsningen oppfører seg langs de karakteristiske kurvene $x(t) = x_0 + vt$. Vi får

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla\rho(x_0 + vt, t) = -\gamma\rho(x_0 + vt, t)$$

eller

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) + \gamma\rho(x_0 + vt, t) = 0$$

om du vil. Denne likningen kan vi håndtere ved å gange hele greia med $e^{\gamma t}$ slik:

$$e^{\gamma t}\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) + e^{\gamma t}\gamma\rho(x_0 + vt, t) = 0$$

og så skrive

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\rho(x(t),t)\right) = 0$$

slik at

$$\rho(x(t),t) = ce^{-\gamma t}.$$

Denne likningen sier at løsningen skal være en konstant ganger $e^{-\gamma t}$ på hver karakteristisk kurve, så om vi setter

$$\rho(x,t) = g(x - vt)e^{-\gamma t}$$

har vi noe som tilfredsstiller både differensiallikningen og initialkravet.

Oppgave 3

a) La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Den totale massen inne på Ω er

$$\int_\Omega \rho \, dx$$

Denne er gitt i kilo, og endringen

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dx$$

er følgelig gitt i kilo per sekund. Dersom v er gitt i meter per sekund, er ρv gitt i kilo per sekund per kvadratmeter, så da er

$$\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS$$

den totale utstrømningen av masse gjennom $\partial\Omega$ i kilo per sekund. Hvis vi antar at masse ikke skapes eller ødelegges inne på Ω, må vi ha

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, dx + \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS = 0$$

siden negativ utstrømning leder til økning av masse inne på Ω. Dette er kontinuitetslikningen på integralform, og bruker vi divergensteoremet og antar tidsderivasjonen får lov til å gå inn under trippelintegralet, får vi

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\rho\, dx \int_\Omega \nabla \cdot (\rho v)\;\; dx = 0$$

og dersom Ω kan velges vilkårlig, må disse integrandene være like, slik at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

b) Partikkelflukstettheten er gitt ved ρv, så Ficks lov blir

$$\rho v = -D\nabla\rho$$

og antar vi at D ikke endrer seg i rom eller tid og setter denne inn i kontinuitetslikningen, får vi diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D\Delta\rho.$$

Oppgave 4 Vi splitter opp først:

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z} + \sin\left(\frac{1}{z-1/2}\right)\; dz = \int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\; dz + \int_\Gamma \sin\left(\frac{1}{z-1/2}\right)\; dz$$

Den første tar vi med cauchys integralformel med $f(z) = \sin z$ og $z_0 = 0$ og får

$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\; dz = 2\pi i \sin 0 = 0$$

og den andre kan vi bare laurentrekkeutvikle om $z_0 = 1/2$ og hente ut koeffisienten til $1/(z-1/2)$, som er 1. Alt i alt får vi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\sin z}{z} + \sin\left(\frac{1}{z-1/2}\right)\; dz &= \int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\; dz + \int_\Gamma \sin\left(\frac{1}{z-1/2}\right)\; dz \\ &= 0 + 2\pi i = 2\pi i.\end{aligned}$$

Oppgave 5 Det første vi må gjøre er å se litt på

$$S(y) = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La oss beregne

$$S^2 = \begin{pmatrix} -(y_2^2 + y_3^2) & y_1y_2 & y_1y_3 \\ y_1y_2 & -(y_1^2 + y_3^2) & y_2y_3 \\ y_1y_3 & y_2y_3 & -(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}$$

og (husk at $|y| = 1$)

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix} = -S$$

og

$$S^4 = \begin{pmatrix} (y_2^2 + y_3^2) & -y_1y_2 & -y_1y_3 \\ -y_1y_2 & (y_1^2 + y_3^2) & -y_2y_3 \\ -y_1y_3 & -y_2y_3 & (y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} = -S^2$$

og

$$S^5 = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

Vi beregner så:

$$\begin{aligned} e^{\theta S} &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\ &\quad + \frac{\theta^3 S^3}{3!} + \frac{\theta^4 S^4}{4!} \\ &\quad + \frac{\theta^5 S^5}{5!} + \frac{\theta^6 S^6}{6!} + \cdots \\ &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\ &\quad - S\frac{\theta^3}{3!} - S^2\frac{\theta^4}{4!} \\ &\quad + S\frac{\theta^5}{5!} + S^2\frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ &\quad = I + S\sin\theta + S^2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Oppgave 6

a) Laplaces likning er

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=0$$

i kulekoordinater, og dersom u ikke skal avhenge av φ og θ, får vi

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0.$$

Det er vanlig å kalle denne løsningen $\Phi(r)$. Ganger vi likningen med r^2, får vi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0.$$

slik at

$$\Phi'(r)=\frac{c_1}{r^2}$$

og

$$\Phi(r)=c_2-\frac{c_1}{r}.$$

b) Divergensteoremet for skalarfelt gir

$$\int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot dS=\int_{\Omega}\Delta u=0.$$