

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4121 Matematikk 4 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 14.05.2025

Eksamenstid (fra–til): 15:00 - 19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): ??

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

a) Vi beregner

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 + 0 + 0 = 0$$

og

$$\begin{aligned}\nabla \times f &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) e_3 \\ &= e_1 + e_2 + e_3.\end{aligned}$$

b) Vi må ha g slik at $\nabla \times g = f$. Dette gir likningene

$$\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} = x_3$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} = x_1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_2$$

og vi ser lett at for eksempel $g(x) = -\frac{1}{2}(x_2^2, x_3^2, x_1^2)$ gjør susen, siden $\nabla \cdot g = 0$.**Oppgave 2** Hvis vi evaluerer løsningen ρ på de karakteristiske kurvene får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla \rho(x_0 + vt, t) = f(x_0 + vt, t)$$

og hvis vi integrerer denne likningen fra 0 til t , får vi

$$\rho(x(t), t) - \rho(x(0), 0) = \int_0^t f(x(s), s) ds = \int_0^t f(x_0 + vs, s) ds$$

slik at

$$\rho(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x_0 + vs, s) ds.$$

Men $x_0 = x - vt$, så vi kan skrive dette enda penere slik:

$$\rho(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x + v(s - t), s) ds$$

Oppgave 3 Maxwells likninger på differensialform er:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$$

a) Vi deriverer den første likningen og får

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

b) De to første kan vi trippelintegre over området $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot E \, dx = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot B \, dx = 0$$

og massere med divergensteoremet på venstre side:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

De to siste kan vi fluksintegre over flaten $\Sigma \in \mathbb{R}^3$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times E) \cdot dS = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS$$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times B) \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

og massere med Stokes' teorem på venstre side:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \\ c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS\end{aligned}$$

Oppgave 4 Vi splitter opp først:

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z - 1/2} + \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z - 1/2} dz + \int_{\Gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

Den første tar vi med Cauchy's integralformel med $f(z) = \sin z$ og $z_0 = 1/2$ og får

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z - 1/2} dz = 2\pi i \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

og den andre kan vi bare rekkeutvikle om $z_0 = 0$ og hente ut koeffisienten til $1/z$, som er 1. Alt i alt får vi

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} + \sin\left(\frac{1}{z - 1/2}\right) dz &= \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz + \int_{\Gamma} \sin\left(\frac{1}{z - 1/2}\right) dz \\ &= 2\pi i \cos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i = 2\pi i \left(\sin\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right).\end{aligned}$$

Oppgave 5 Vi beregner først

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 v_1 & v_2 v_1 & v_3 v_1 \\ 0 & v_1 v_2 & v_2 v_2 & v_3 v_2 \\ 0 & v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3 v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & vv^T \end{pmatrix}$$

og

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

slik at $K^4 = K^2$ og $K^5 = K^3$ og så videre. Dette gjør det enkelt å summere opp:

$$\begin{aligned} e^{\lambda K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n K^n}{n!} \\ &= I + K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} + K^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ &= I + K \sinh(\lambda) + K^2 (\cosh(\lambda) - 1) \end{aligned}$$

Oppgave 6

a) Divergensteoremet sier at

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f = \int_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

Dersom $f = \nabla u$, får vi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u = \int_{\Omega} \Delta u$$

på den ene siden, og

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

på den andre siden. Divergensteoremet for skalarfelt lyder altså slik:

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

b) Divergensteoremet for skalarfelt gir

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS = \int_{\Omega} \Delta u = 0.$$

Oppgave 7 Vi antar

$$\psi(x) = R(r)Y(\theta, \varphi).$$

slik at den tidsuavhengige schrödingerlikningen blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi.$$

Hvis vi nå ganger med r^2 , får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right) - \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} \psi = Er^2 \psi.$$

og setter alle r -tingene på dene ene siden, får vi

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} \psi + Er^2 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right)$$

Hvis vi nå setter inn $\psi(x) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, får vi

$$\begin{aligned} Y(\theta, \varphi) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dr} \left(r^2 R'(r) \right) + \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} R(r)Y(\theta, \varphi) + Er^2 R(r)Y(\theta, \varphi) \\ = -R(r) \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right) \end{aligned}$$

og deler vi likningen på $R(r)Y(\theta, \varphi)$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dr} \left(r^2 R'(r) \right) + \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} + Er^2 \\ = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right). \end{aligned}$$

Siden den ene siden nå kun avhenger av radien og den andre kun av vinklene, må begge sider være konstante, og vi får de to likningene

$$\gamma = \frac{1}{R(r)} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dr} \left(r^2 R'(r) \right) + \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} + Er^2$$

og

$$\gamma = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right).$$