

Oppgave 1

- a) Siden f er harmonisk er volumet $\pi f(0) = \pi$.
- b) Dette arbeidet blir 2π på grunn av Greens teorem.
- c) Dette blir null på grunn av Greens teorem.
- d) Siden Σ er grafen til et skalarfelt av to variable blir parametriseringen

$$h(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

med oppovernormalvektor

$$e_n = \frac{\partial h}{\partial x_1} \times \frac{\partial h}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at fluksen blir

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \nabla \times g \cdot dS &= \int_D (-x_2, x_1, 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) + 1) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} dx_2 dx_1 \\ &= \int_D 4x_1x_2 + 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) + 1 \, dx_2 dx_1 \\ &= 0 + 2\pi + \pi = 3\pi \end{aligned}$$

Oppgave 2 Vi skal minimere

$$f(x) = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

på

$$g(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

Vi får

$$f'(x) = 2(x_1, x_2, x_3)$$

og

$$g'(x) = (1, 2, 3),$$

og likningssettet blir følgelig

$$\begin{aligned}2x_1 &= \lambda \\2x_2 &= 2\lambda \\2x_3 &= 3\lambda \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}$$

som impliserer at $\lambda \neq 0$ og at

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9\lambda}{2} = 2$$

slik at

$$\lambda = \frac{2}{7}$$

og

$$x = \frac{1}{14}(1, 2, 3)^T.$$

Oppgave 3 Massen er $m = \rho\alpha$, og massesenteret blir

$$\frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x f(x) \, dx = \frac{1}{\rho\alpha} \begin{pmatrix} \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^1 r^2 \cos \theta \, dr d\theta \\ \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr d\theta \end{pmatrix} = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4

a) Svaret blir $2\pi i$ som alltid.

b) Også her blir svaret $2\pi i$ siden

$$\begin{aligned}\frac{\cos(z-1-i)}{z-1-i} &= \frac{1}{z-1-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1-i)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{z-1-i} - \frac{z-1-i}{2} + \frac{(z-1-i)^3}{4!} - \dots\end{aligned}$$

Oppgave 5

- a) Dersom Ω er en sirkelskive sentert i x med radius r , kan vi definere en funksjon ϕ og skrive

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta.\end{aligned}$$

La oss derivere litt og bruke Greens teorem:

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{\Omega} \Delta u = 0\end{aligned}$$

Dette viser at ϕ ikke endrer seg med r . Den konstante verdien må være

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = u(x)$$

slik at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds.$$

- b) Vi tar det neste integralet i polarkoordinater og regner i vei:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(x_1 + p \cos \theta, x_2 + p \sin \theta) p d\theta dp \\ &= \frac{u(x)}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi p \, dp = u(x)\end{aligned}$$