

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 19.11.2025

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

a) Jacobimatrisen til f er

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2(x_1 - 2x_2), 4(x_1 - 2x_2)) \\ &= (-2x_1 + 4x_2, 4x_1 - 8x_2) \end{aligned}$$

og setter vi denne lik null, får vi $x_1 = 2x_2$. Det finnes altså en hel linje med kritiske punkter. Hessematrisen er

$$f''(x) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

som har lineært avhengige kolonner og en egenverdi lik null, og følgelig gir hessematrisen ingen informasjon. Personer med inngående kjennskap til andreordens polynomer ser umiddelbart at linjen med kritiske punkter er en fjellrygg - når $x_1 = 2x_2$ er $f(x) = 9$, og alle andre funksjonsverdier er åpenbart mindre enn denne siden $(x_1 - 2x_2)^2 > 0$ når $x_1 \neq 2x_2$.

b) Funksjonens maksimale verdi er helt klart 9, jf. oppgave a, og minimumsverdiene må sitte på $\partial\Omega$. Siden både $\partial\Omega$ og nivåkurvene til f er rette linjer, vil vi ikke komme noen vei med lagranges multiplikator metode - vi får parametrisere. Her er parametriseringer for de fire bitene av $\partial\Omega$:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

$$\varrho(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

slik at

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= 9 - (t - 2(1-t))^2 = 1 - (t-2)^2 \\ f(y(t)) &= 9 - (1+t-2t)^2 = 1 - (1-t)^2 \\ f(z(t)) &= 9 - (2-t-2(1+t))^2 = 1 - (-3t)^2 \\ f(\varrho(t)) &= 9 - (1-t-2(2-t))^2 = 1 - (t-3)^2. \end{aligned}$$

Det er klart at ingen av disse andregradspolynomene har lokale minima, så minimumsverdien til f må finnes i ett eller flere av hjørnene. Vi sjekker

$$f(0, 1) = 5$$

$$f(1, 0) = 8$$

$$f(2, 1) = 9$$

$$f(1, 2) = 0$$

og konkluderer med at maksimumsverdien til f er 9 og minimumsverdien er 0. Maksimumsverdien forekommer overalt på linjen $2x_1 = x_2$ mens minimumsverdien finnes i det øverste hjørnet $(1, 2)^T$.

Man kan argumentere raskere ved å se at f når sin minimale verdi der $(x_1 - 2x_2)^2$ er maksimal på Ω , noe som skjer i det punktet som er lengst vekk fra $x_1 = 2x_2$, altså i punktet $(1, 2)$.

c) Dette kan gjøres på flere måter. Man kan gjøre slik:

$$\iint_{\Omega} f(x) \, dx = \int_0^1 \int_{1-x_1}^{1+x_1} 9 - (x_1 - 2x_2)^2 \, dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_{x_1-1}^{3-x_1} 9 - (x_1 - 2x_2)^2 \, dx_2 dx_1$$

Men det er enda penere å innføre koordinatavbildningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

som tar enhetskvadratet i y -planet til Ω , slik at

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x) \, dx &= \int_0^1 \int_0^1 9 - ((1 + y_1 - y_2) - 2(y_1 + y_2))^2 \, 2dy_2 dy_1 \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 9 - (1 - y_1 - 3y_2)^2 \, dy_2 dy_1 = \frac{43}{3}. \end{aligned}$$

d) Siden $|\Omega| = 2$ og $\Delta f = -10$, blir utfluksen -20 iflg Greens teorem.

e) Nei, $\Delta f \neq 0$, så f er ikke harmonisk.

Oppgave 2

a) Overflatearealet er $\pi/2$, og massesenteret blir

$$\frac{2}{\pi\rho} \begin{pmatrix} \rho \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta \\ \rho \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta \\ \rho \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Vektorfeltet kan skrives

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Det første av disse står tangentielt på flaten, og gir ikke bidrag til fluksen.

Det siste blir

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{8}.$$

Oppgave 3 Dersom Ω er en sirkelskive sentert i x med radius r , kan vi definere oss en funksjon ϕ og skrive

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \, r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

La oss derivere litt og bruke Greens teorem:

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{\Omega} \Delta u = 0 \end{aligned}$$

Dette viser at ϕ ikke endrer seg med r . Den konstante verdien må være

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = u(x)$$

slik at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds.$$

Oppgave 4 Cauchys integralformel gir

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z - 1 - i} dz = 2\pi i \sin(1 + i) = 2\pi i (\sin 1 \cosh 1 + i \sinh 1 \cos 1).$$

Oppgave 5 Rotasjonen til f er konstant lik $a_2 v_1 - a_1 v_2$, og følgelig null hvis og bare hvis a og v er parallelle. Dersom rotasjonen er null er arbeidet rundt alle lukkede kurver lik null og f følgelig konservativt. Motsatt implikasjon gjelder også - dersom rotasjonen ikke er null, må det finnes en kurve f gjør arbeid rundt, og følgelig kan ikke f være konservativt.