

Oppgave 1 La $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = 9 - (x_1 - 2x_2)^2$$

der $\Omega \in \mathbb{R}^2$ er kvadratet med hjørner i $(0, 1)^T$, $(1, 0)^T$, $(2, 1)^T$ og $(1, 2)^T$.

- a) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f .
- b) Finn den største og den minste verdien til f .
- c) Finn volumet under grafen til f .
- d) Finn fluksen til ∇f ut av Ω .
- e) Finnes det en funksjon g slik at $f + ig$ er kompleks deriverbar?

Oppgave 2 La Σ være den åttendedelen av enhetskuleskallet som ligger i første oktant (altså den delen av $\mathbb{R}^3$ der $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ og $x_3 \geq 0$).

- a) Finn massesenteret til Σ . Anta konstant massetetthet.
- b) Finn fluksen til vektorfeltet $f(x) = (x_2, -x_1, x_3)^T$ gjennom Σ .

Oppgave 3 La $\Omega \in \mathbb{R}^2$ være en sirkelskive med radius r , sentrert i x , og la $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være en harmonisk funksjon. Vis at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds.$$

Oppgave 4 La Γ være randen til kvadratet med hjørner i 1 , i , $2 + i$ og $1 + 2i$ i det komplekse planet, traversert mot klokken. Finn

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z - 1 - i} \, dz.$$

Oppgave 5 La $a = (a_1, a_2)^T$ og $v = (v_1, v_2)^T$ være konstante vektorer, ingen av dem nullvektoren, og la vektorfeltet $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x) = (a_1x_1 + a_2x_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Vis at f er konservativt hvis og bare hvis a og v er parallelle.