Oppgave 1

a) Gradientvektoren blir

$$f'(x) = (2x_1, -2x_2)$$

så likningen for tangentplanet i $(1, 2)$ blir

$$p(x) = f(1,2) + f'(1,2)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} = -2 + 2(x_1 - 1) - 4(x_2 - 2).$$

b) Likningen $f'(x) = 0$ gir at origo er eneste kritiske punkt, og siden egenverdiene til hessematrisen er 2 og -2, må dette være et sadelpunkt.

c) Siden f er en harmonisk funksjon og Ω er en sirkelskive, kan vi finne volumet under grafen til f ved å gange arealet av sirkelen med $f(2, 1)$, som er f sin verdi i sentrum. Volumet blir følgelig 36π.

d) Vi trenger en funksjon slik at cauchyriemannlikningene

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\partial g}{\partial x_1}$$

er tilfredsstilt. Dette gir

$$2x_1 = \frac{\partial g}{\partial x_2} \qquad -2x_2 = -\frac{\partial g}{\partial x_1}$$

som tilfredsstilles av

$$g(x) = 2x_1x_2 + C$$

der C er en vilkårlig konstant.

Oppgave 2

Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$$

og banefarten er

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2^2} = \sqrt{5}$$

så enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$$

og enhetsnormalen er den normaliserte tidsderiverte av denne:

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3 Massesenter er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_\Omega \rho(x)\ dx} \begin{pmatrix} \iiint_\Omega x_1 \rho(x)\ dx \\ \iiint_\Omega x_2 \rho(x)\ dx \\ \iiint_\Omega x_3 \rho(x)\ dx \end{pmatrix}.$$

En halv enhetskule i kulekoordinater som ligger slik at $x_3 \geq 0$, beskrives av ulikhetene

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

og siden massetettheten er konstant, kansellerer denne. På grunn av symmetri vet vi at x_1- og x_2-koordinatene er 0, men dette er lett å regne ut siden θ går fra 0 til 2π:

$$\iiint_\Omega x_1\ dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \sin^2\varphi\ d\varphi d\theta dr = 0$$

Den siste koordinaten sitter litt opp på x_3-aksen. Vi beregner først

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega x_3\ dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\ d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\varphi\ d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\ d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 r^3\ dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Volumet til en halv enhetskule er $2\pi/3$, så vi kan nå beregne

$$\frac{\iiint_\Omega x_3 \; dx}{\iiint_\Omega \; dx} = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8}$$

så massesenteret sitter i $(0, 0, 3/8)$.

Oppgave 4 Finn arbeidet vektorfeltet $f(x) = (x_2, -x_1)^T$ gjør på en partikkel som reiser én gang rundt ellipsen Likningen for ellipsen kan skrives

$$\frac{x_1^2}{1/2} + \frac{x_2^2}{1} = 1$$

og således ser vi at den har halvakser $1/\sqrt{2}$ og 1, og en fin parametrisering er

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

med definisjonsmengde $[0, 2\pi)$ og tangentvektor

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Arbeidet blir

$$\int_\Gamma f \cdot ds = (\sin\theta, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\theta = -\sqrt{2}\pi.$$

Det går også fint å bruke Greens teorem om man beregner at

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2$$

og så ganger dette med arealet av ellipsen, som er $\pi/\sqrt{2}$.

Oppgave 5 Vi skriver

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

og integrerer ledd for ledd

$$\int_\Gamma e^{1/z} \; dz = \int_\Gamma \; dz + \int_\Gamma \frac{1}{z} \; dz + \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{1}{z^2} \; dz + \cdots .$$

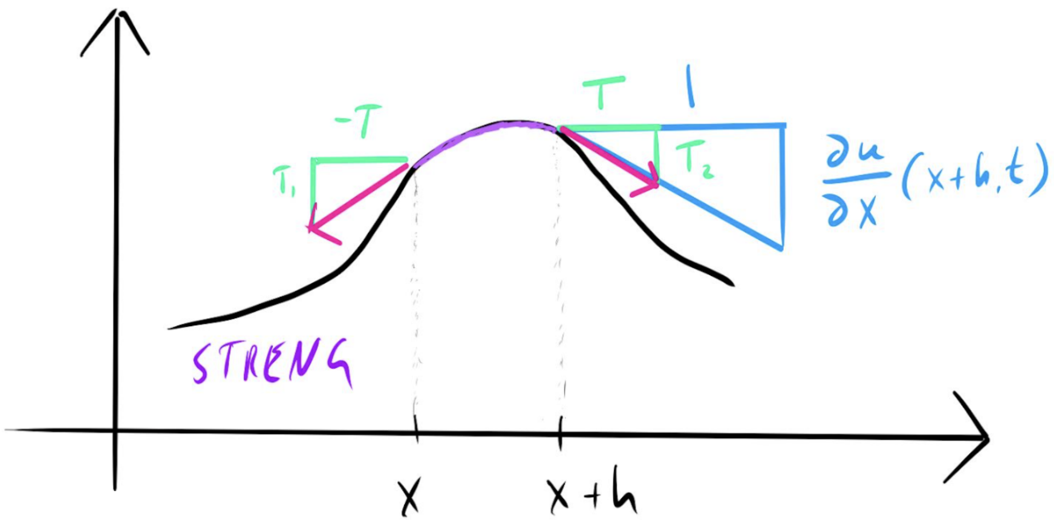
Disse integralene har vi beregnet i kurset og alle blir null unntatt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \; dz = 2\pi i,$$

slik at

$$\int_\Gamma e^{1/z} \; dz = 2\pi i.$$

Oppgave 6 Når vi utledet bølegliknigen for en streng, gjorde vi slik:



Vi antar at den horisontale strekkraften T (målt i newton) er lik overalt, slik at den lilla biten av strengen kun beveger seg opp og ned, ikke frem og tilbake. Massetettheten ρ er gitt i kilo per meter, så massen til den lilla biten er ρh. Netto vertikal kraft på biten er $T_1 + T_2$, så Newtons andre lov $F = ma$ gir

$$T_1 + T_2 = \rho h \ddot{u},$$

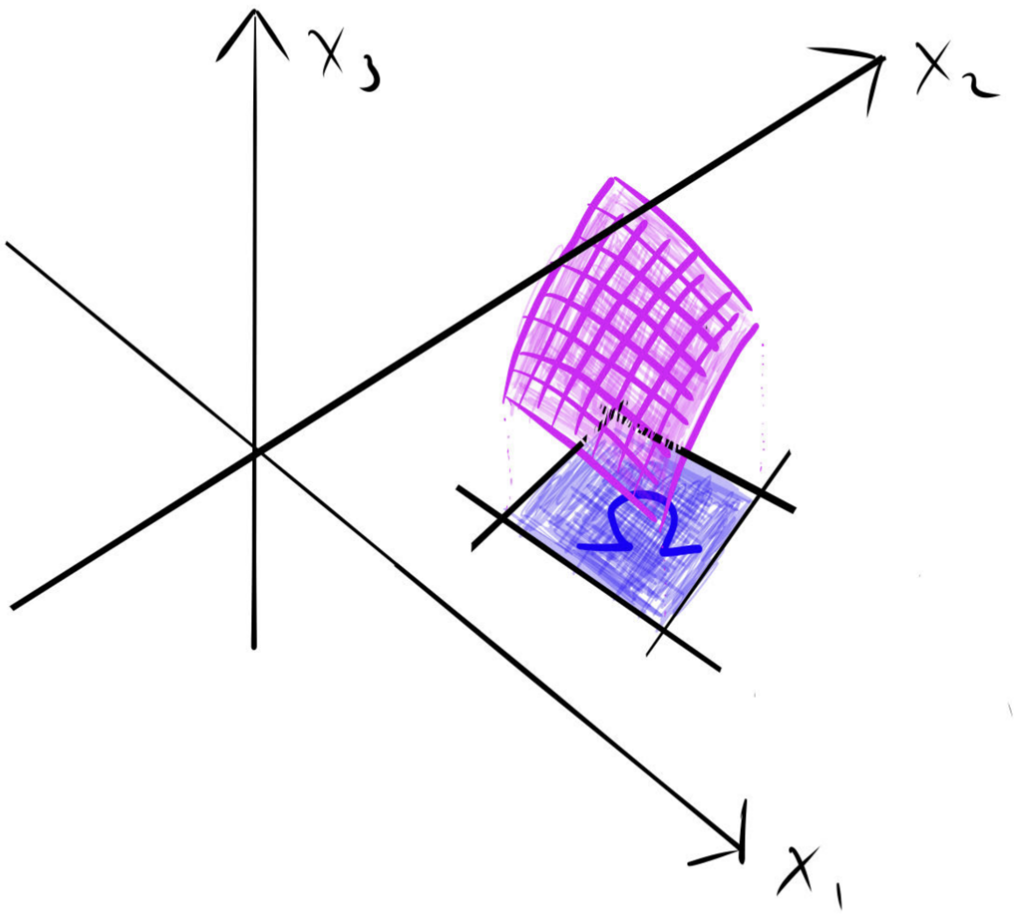
og siden dekomponeringen av strekkraften danner en trekant som er kongruent med trekanten som gir stigningstallet til u med hensyn på x, kan vi skrive

$$T_1 + T_2 = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right).$$

Hvis vi nå deler Newtons andre lov på h og lar $h \to 0$, får vi bølgelikningen for en streng:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La oss se på en liten bit av et trommeskinn:



Strekkraften på en streng er naturlig å måle i Newton, for strengens stramhet kan sammenlignes med stramheten du får ved å bruke den til å henge opp et lodd. (På gitarstrengpakken står strengestrekker oppgitt i kilo.) For et trommeskinn er det mest naturlig å oppgi strekket i newton per meter - da kan du integrere strekket over et linjestykke for å finne den totale kraften på linjestykket. Dette er som hydrostatisk trykk i vann - trykk er kraft per areal, og man integrerer trykket over en flate for å finne totalkraften på flaten. Hvis vi sier at Ω i figuren er et kvadrat med det ene hjørnet i x, sidekant h og massesenter i $(x_1 + h/2, x_2 + h/2)$, blir Newtons andre lov

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1 + h/2, x_2 + h/2) =$$
$$Th\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1 + h, x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x + h_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t)\right)$$

der kreftene på høyre side er fremkommet ved å anta at det horisontalet strekket T er konstant og så bruke det samme kongruenstrikset som for strengen. Lar vi $h \to 0$, får vi bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

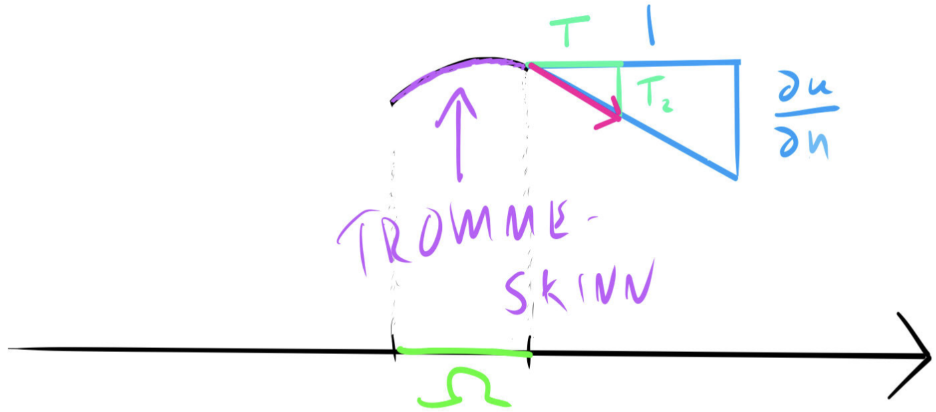
for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn. Vi kunne også summert opp kreftene langs randen av den lille biten og så brukt Greens teorem slik:

$$F = T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = T\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\, dx \approx Th^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

Dette var det noen som syntes var mer naturlig i forelesning. Uttrykket

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$$

er en spesiell notasjon for den retningsderiverte til u langs utnormalvektoren til $\partial\Omega$, og det er kanskje ikke helt trivielt å se at netto kraft er linjeintegralet til denne. For å se det må du nesten tegne opp den samme kongruenstrekanten som for strengen, men sette den på kanten av den lille biten med trommeskinnet og normalt utover slik:



Oppgave 7 En parametrisering for smultringen er

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos\varphi)\cos\theta \\ (r_1 + r_2 \cos\varphi)\sin\theta \\ r_2 \sin\varphi \end{pmatrix}$$

der definisjonsområdet er $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Flateelementet blir

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right| = \left|\begin{pmatrix} -(r_1 + r_2 \cos\varphi)\sin\theta \\ (r_1 + r_2 \cos\varphi)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r_2 \sin\varphi\cos\theta \\ -r_2 \sin\varphi \sin\theta \\ r_2 \cos\varphi \end{pmatrix}\right| = r_2(r_1 + r_2\cos\varphi).$$

og arealet blir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r_2(r_1 + r_2\cos\varphi)\, d\phi d\theta = 4\pi^2 r_1 r_2.$$