

Oppgave 1 Signalet er jevnt, så sinusdelen forsvinner, og vi kan beregne

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^1 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega)).\end{aligned}$$

Oppgave 2 Vi skriver ut detaljene i funksjonen

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2\end{aligned}$$

og finner gradienten

$$f'(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2 - 3, 2x_2 + x_1 - 3).$$

a) Siden $f'(0,0) = (-3, -3)$, er dette retningen i $\mathbf{x}$ -planet med brattest stigning ut fra origo.

b) Enhetsvektor i retningen $(1,2)$ er $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$, så den retningsderiverte i denne retningen blir

$$f'(0,0)(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T = -\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Oppgave 3 Likningssettet for β blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{01} \\ \beta_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og normallikningene blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{01} \\ \beta_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som gir $\beta_{10} = \beta_{01} = 1/2$ og $\beta_{00} = 1/4$ slik at regresjonspolynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}.$$

Oppgave 4

a) Det karakteristiske polynomet er

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

som gir en enkel egenverdi $\lambda_1 = 2$ og en dobbel $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Egenvektoren til λ_1 er $(1, -1, 1)^T$ mens den doble kun har én egenvektor $(0, 0, 1)$. Dette gir

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vi kan nå finne den siste kolonnen i V ved å løse likningen

$$AV = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ -1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ -1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = VJ$$

som gir $v_1 = 0$, $v_2 = -1$ og v_3 lik hva som helst. Det enkleste er å sette $v_3 = 0$, da får vi

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

på bare fire gausseliminasjonssteg.

b) Vi har nå

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = VJV^{-1}$$

så nå er det bare å beregne $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$. La oss først splitte opp J slik:

$$J = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Disse to kommuterer ($DN = ND = N$), så vi kan skrive

$$e^{At} = e^{V(D+N)V^{-1}t} = Ve^{(D+N)t}V^{-1} = Ve^{Dt}e^{Nt}V^{-1}$$

og nå er det bare å se at N^2 er nullmatrisen, så vi får

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= V e^{Dt} e^{Nt} V^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Løsningen kan også beregnes med laplacetransform, begynn i så fall med den første likningen og jobb deg nedover.

Oppgave 5

a) Anta at realdelen til s er større enn null. Vi beregner

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x}) &= \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0). \end{aligned}$$

b) Vi ganger likningen

$$y(t) = tx(t)$$

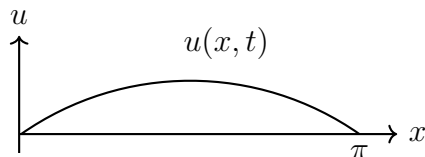
med e^{-st} og får

$$y(t)e^{-st} = tx(t)e^{-st} = -\frac{d}{ds}x(t)e^{-st}$$

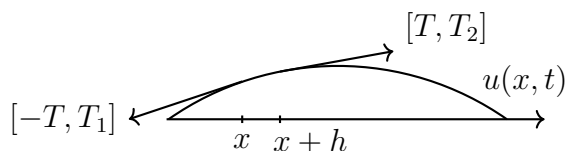
og integrerer fra 0 til ∞ , slik at

$$Y(s) = \int_0^\infty tx(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} X(s).$$

Oppgave 6 Vi tenker at vi har en vibrerende streng med konstant massetetthet ρ (nå i kg/m) spent opp i $x = 0$ og $x = \pi$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert punkt x og hver tid t gir utslaget u fra likevektslinjen, som ligger langs x -aksen.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekkinget, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekkinget er konstant lik T :



Vi setter nå opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er ρh , og akselerasjonen til strengen i punktet x er $\ddot{u}(x, t)$. Kraften på biten er $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho\ddot{u}(x, t) = T_2 + T_1,$$

og deler vi på Th , får vi

$$\frac{\rho}{T}\ddot{u}(x, t) = \frac{T_2/T + T_1/T}{h} = \frac{\nabla u(x + h, t) - \nabla u(x, t)}{h}.$$

Lar vi til slutt $h \rightarrow 0$, får vi bølgeligningen

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t),$$

der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

Oppgave 7 Fourieromvendingen til f er

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

og

$$F'(k) = \frac{d}{dk} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial k} e^{-ikx} \, dx = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-ikx} \, dx$$

slik at

$$F'(k) = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx = -iE.$$