

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4106 Matematikk 2 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 20.05.2025

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): ??

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Systemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

og normallikningene blir

$$\begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

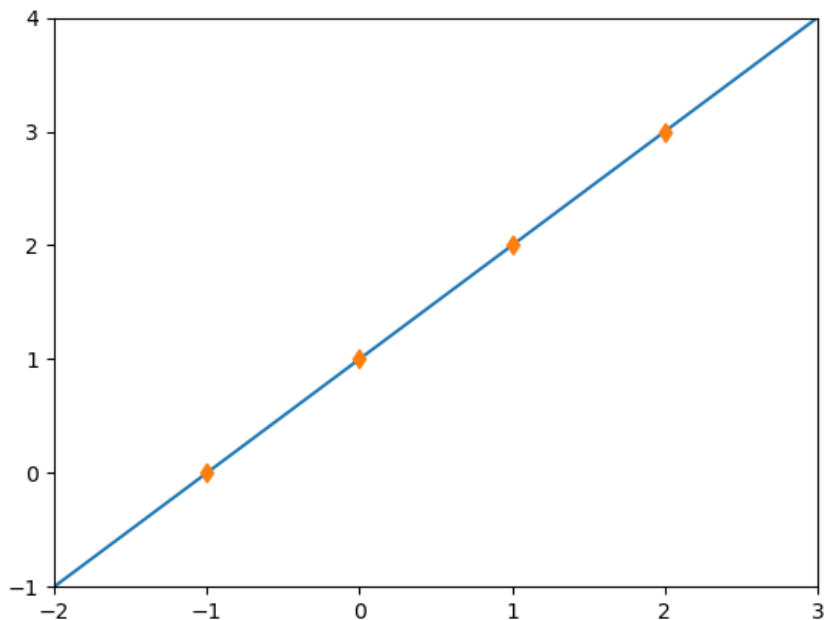
som gir

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$p(x) = x + 1.$$

Siden de fire punktene ligger på en rett linje, blir denne regresjonen identisk med den første ordens interpolasjonen.



Oppgave 2 Vi transformerer og får

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-2s}}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{e^{-2s}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) e^{-2s} \end{aligned}$$

som gir

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(e^{-(t-2)/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (t-2) \right) \right) u(t-2).$$

Oppgave 3 Den observante student ser at kolonnene i A er ortogonale, så

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4 Vi beregner

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0$$

så f er deriverbar i $x = 0$.

Oppgave 5 Dersom A har full rang, er

$$0 < \|A\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}$$

så lenge $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Oppgave 6

a) Den ortogonale diagonaliseringen til A er

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

så vi kan beregne

$$e^A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{e}{2} \begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

b) Siden

$$A^T A = A A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

er svd-faktoriseringen til A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Oppgave 7

a) La $h(x) = e^{-ax^2}$. Vi må beregne

$$\hat{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$$

Den observante student vil merke at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \hat{h}(k) &= \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\partial}{\partial k} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} -2axe^{-ax^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h'(x)} e^{-ikx} dx = -\frac{k}{2a} \hat{h}(k) \end{aligned}$$

så vi har altså differensiallikningen

$$\frac{d}{dk} \hat{h} + \frac{k}{2a} \hat{h} = 0$$

som løses ved å gange alt med den integrerende faktor:

$$e^{k^2/4a} \left(\frac{d}{dk} \hat{h} + \frac{k}{2a} \hat{h} \right) = 0$$

Denne kan vi slå sammen med produktregelen og se at

$$\frac{d}{dk} (e^{k^2/4a} \hat{h}) = 0$$

og følgelig

$$\hat{h} = C e^{-k^2/4a}$$

Konstanten får vi ved å evaluere i $k = 0$ og se at

$$C = \hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

slik at

$$\hat{h} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$$

b) Vi bruker varablelskiftet $u = t - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned} \widehat{x * y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y(t - v) dv e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y(t - v) e^{-i\omega t} dv dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv y(u) e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-i\omega u} du = \hat{x} \hat{y} \end{aligned}$$

c) Vi fourieromvender med hensyn på x og skriver

$$\hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

slik varmelikningen blir

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -k^2 \hat{u}$$

i bølgetalldomenet. Denne likningen har løsning

$$\hat{u}(k, t) = c(k)e^{-k^2 t}$$

og

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{g}(k)$$

forteller oss at $c(k) = \hat{g}(k)$, slik at

$$\hat{u}(k, t) = \hat{g}(k)e^{-k^2 t}$$

og nå er det bare å inversomvende med konvolusjonsteoremet og bruke punkt a) med $1/4a = t$ og se at

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4t}} dv.$$