

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 06.08.2024

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

- a) Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, så her er det bare å gange med e^t på begge sider og integrere to ganger:

$$x(t)e^t = e^t + c_1t + c_0$$

Ganger vi nå med e^{-t} på begge sider, får vi

$$x(t) = 1 + (c_1t + c_0)e^{-t}$$

og bruker vi initialkravene, får vi likningene

$$0 = 1 + c_0$$

og

$$0 = 1 + c_1$$

slik at

$$x(t) = 1 - (t + 1)e^{-t}.$$

- b) Dette er et system på formen $\dot{x} = Ax$ der

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisen har egenverdier $\pm i$ og egenvektorer

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$$

slik at

$$x(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

. Dersom $c_1 = c_2 = 1/2$, er initialkravene tilfredsstilt, og vi får

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2 Vi har

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

så integralet blir

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\pi} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)!)} \pi^{2n+1}$$

Oppgave 3 Vi merker oss at integranden ikke er definert for $x = 0$, men

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så det går bra. Merk at $\sin(\pi) = 0$, så denne trenger vi ikke ta med. Uttrykket for trapesregelen blir derfor

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin x_i}{x_i} \right)$$

og koden under produserer estimatet $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.85193705196$.

```
import numpy as np

n=100000

h=np.pi/n

f=1

for i in range(n-1):

    x=(i+1)*np.pi/n

    f=f+2*np.sin(x)/x

print h*f/2
```

Oppgave 4 Hvis vi ganger pendellikningen med $\dot{x}$, får vi

$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$$

som kan integreres med hensyn på t :

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

Denne forteller at totalenergien er konserverv.

Oppgave 5 Likningssystemet har to inkonsistente likninger (andre og tredje likning), så dette systemet har ingen løsninger. Kolonnene er lineært uavhengige, så dimensjonen på nullrommet er null.

Oppgave 6 Vi setter

$$1 - i = \sqrt{2}e^{(-\pi/8+2k\pi)i}$$

og skriver opp alle løsningene :

$$\begin{aligned} m = 0 : & \quad e^{(-\pi/40)i} \\ m = 1 : & \quad e^{(-\pi/40+2\pi/5)i} \\ m = 2 : & \quad e^{(-\pi/40+4\pi/5)i} \\ m = 3 : & \quad e^{(-\pi/40+6\pi/5)i} \\ m = 4 : & \quad e^{(-\pi/40+8\pi/5)i} \end{aligned}$$

Oppgave 7 Funksjonen $f : A \rightarrow f(A)$ sin inverse funksjon eksisterer dersom f er injektiv, og f^{-1} tilfredsstiller likningen

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

for alle $x \in f(A)$. Hvis vi deriverer denne likningen med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Oppgave 8

- a) Det karakteristiske polynomet er $\lambda(1 - \lambda^2) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2$, så det finnes en dobbel egenverdi $\lambda = 1$ og en enkel $\lambda = -1$. Litt triviell gaussing gir egenvektormatrisen

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Den observange studdenjt ser at $A^2 = I$, så $A^{-1} = A$.