



Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

## Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

**Faglig kontakt under eksamen:** Morten Andreas Nome

**Tlf:** 90849783

**Faglig kontakt møter i eksamenslokalet:** NEI

**Eksamensdato:** 9.12.2024

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00 - 13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** E: Ingen hjelpemidler tillatt.

### **Annen informasjon:**

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider (uten forside):** 5

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

#### Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig  2-sidig

sort/hvit  farger

skal ha flervalgskjema

\_\_\_\_\_  
Dato

\_\_\_\_\_  
Sign



**Oppgave 1** Den første likningen gir at  $x_1$  er konstant, og initialkravet gir  $x_1(t) = 1$ . Den andre likningen blir

$$\dot{x}_2 + x_2 = 1$$

og ganger vi med  $e^t$  og integrerer, får vi

$$e^t x_2(t) = e^t + c$$

som sammen med initialkravet gir

$$x_2(t) = 1 - e^{-t}.$$

Til slutt får vi nå

$$\dot{x}_3 + x_3 = 1 - e^{-t}$$

og ganger vi med  $et$  og integrerer, får vi

$$e^t x_3 = e^t - t + c,$$

slik at

$$x_3 = 1 - te^{-t} + ce^{-t}.$$

Initialkravet  $x_3(0) = 0$  gir  $c = -1$ , så alt i alt er

$$x_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = 1 - e^{-t}$$

$$x_3(t) = 1 - (t + 1)e^{-t}$$

## Oppgave 2

a) Vi setter  $-x^2/2$  inn for  $x$  i rekken for eksponentialfunksjonen:

$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

b) Siden integranden er jevn, kan vi integrere fra 0 til 1 slik:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2/2} dx &= 2 \int_0^1 e^{-x^2/2} dx \\ &= 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

slik at

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2/2} dx \approx 2 \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

**Oppgave 3** Substituerer vi  $i\theta$  for  $\theta$  i formlene for hyperbolsk sinus og cosinus, får vi

$$\begin{aligned} \cosh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta \\ \sinh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin \theta \end{aligned}$$

og gjør vi den samme substitusjonen Eulers formel, får vi

$$\begin{aligned} \cos(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh \theta \\ \sin(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = -i \sinh \theta \end{aligned}$$

Substituerer vi  $ib$  for  $b$  i

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

og bruker likningene over, får vi

$$\begin{aligned} \cos(a + bi) &= \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b \\ \sin(a + bi) &= \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b \end{aligned}$$

**Oppgave 4** Vi har

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Merk at for alle  $n$  er

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{og} \quad \binom{n}{1} = n$$

slik at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

**Oppgave 5**

a) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{pmatrix} &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \lambda^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \lambda - \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= \lambda^2 + \left( \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \right) \lambda - \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

og setter vi denne lik null, får vi

$$(2\sqrt{2})\lambda^2 + (2 - \sqrt{6})\lambda - (1 + \sqrt{3}) = 0$$

slik at

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\sqrt{6} - 2 \pm \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2 - 8\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - 2 \pm \sqrt{10 - 12\sqrt{6} - 8\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

b)  $A^{-1} = -\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

## Oppgave 6

```
import numpy as np

T=5
N=100
h=T/N
t=np.linspace(0,T,N+1)
v=np.zeros(N+1)
v[0]=1

for k in range(N):
    v[k+1]=v[k]+h*(2-v[k]**2)
```

**Oppgave 7** Det er klart at svaret er ja, for  $a = b = c = 0$  gjør likningen sann for alle  $x$ . Men det finnes mange løsninger. Dette er et lineæralgebraproblem, og gaussingen

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

forteller oss at så lenge

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

vil lineærkombinasjonen av de tre polynomene bli identisk lik null.

**Oppgave 8**      Differensiallikningen er

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

der  $m$  er massen og  $k$  er fjærstivheten. Initialkravene er  $x(0) = l$  (der  $l$  er hvor langt klossen er dradd ut) og  $\dot{x}(0) = 0$ . Løsningen er

$$x(t) = l \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Denne bevegelsen er uavhengig av  $l$ , grevlingen har nådd tilbake til punktet den ble sluppet fra når

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t = 2\pi$$

eller

$$k = \frac{4\pi^2 m}{t^2}$$

Setter vi inn  $m = 6.0$  kilo og  $t = 2$  sekunder i denne, får vi at  $k = 6\pi^2$  newton per meter.