NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS, MTTK og MTKJ

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Eksamensdato: 21.12.2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider (uten forside): 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Dersom tiden måles i inkrementer på tyve minutter, vil antall bakterier $x(t)$ etter t tyveminutters intervaller være gitt ved

$$x(t) = 2^t.$$

Hvis vi løser likningen $2^t = 10000$, får vi $t = \ln 10000/\ln 2 = 4\ln 10/\ln 2$. Alle barn i barnehagen vet ellers at $2^{13} = 8192$, så $4\ln 10/\ln 2 \approx 13$. Det går altså om lag fire og en halv time før grevlingen blir syk.

Oppgave 2

```
import numpy as np
x=0.1
y=1
tol=.0001

while np.abs(y-x) > tol:
    y=x
    x=2+np.cos(x)
```

Oppgave 3 Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2.$$

Setter vi dette lik null og finner λ, får vi

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}.$$

Nullrommet til

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \pm i\sin\theta \end{pmatrix}$$

er henholdsvis alle skalarmultipler på formen

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

Den observante student vil merke seg at dersom $\theta = 0$ er rotasjonsmatrisen bare identitetsmatrisen og dersom $\theta = \pi$ identitetsmatrisen ganget med minus en. I disse tilfellene sammenfaller egenverdiene, og alle vektorer er egenvektorer.

Oppgave 4

a) Det kjappeste er nok å gange med e^{2t} på begge sider, omskrive cosinusfunksjonen med Eulers formel

$$\dot{x}(t)e^{2t} + 2x(t)e^{2t} = e^{2t}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \left(\frac{e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}}{2}\right)$$

og så integrere

$$x(t)e^{2t} = c + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} + \frac{1}{2-i}e^{(2-i)t}\right)$$

og så gange opp med e^{-2t}:

$$\begin{aligned} x(t) =& ce^{-2t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i}e^{it} + \frac{1}{2-i}e^{-it}\right) \\ =& ce^{-2t} + \frac{1}{5}\left(\frac{2-i}{2}e^{it} + \frac{2+i}{2}e^{-it}\right) \\ =& ce^{-2t} + \frac{1}{5}\left(2\cos t + \sin t\right) \end{aligned}$$

Bruker vi initialkravet $x(0) = 0$, får vi $0 = c + \frac{2}{5}$ slik at

$$x(t) = \frac{1}{5}\left(2\cos t + \sin t - 2e^{-2t}\right).$$

b) Vi får vel begynne med å finne egenverdier og egenvektorer til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

men heisann denne er visst defekt, siden eneste egenverdi er 1 og det korresponderende egenrommet er endimensjonalt. Men den siste likningen er nå triviell å løse, og vi ser at $x_2(t) = e^t$. Setter vi denne inn i den første likningen, får vi

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - e^t$$

som vi enkelt kan løse ved å skrive

$$\dot{x}_1(t) - x_1(t) = -e^t$$

og så gange med e^{-t} og integrere:

$$x_1(t)e^{-t} = -t + c$$

slik at

$$x_1(t) = (c - t)e^t.$$

Bruker vi initialkravet $x_1(0) = 1$, får vi $c = 1$, slik at

$$\begin{aligned} x_1(t) =& (1-t)e^t \\ x_2(t) =& e^t \end{aligned}$$

Oppgave 5 De to vi trenger her er

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Vi beregner

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = \cos(2\theta).$$

Oppgave 6 Dette er to 2×2-systemer skrevet opp litt annerledes. Vi skriver opp de fire likningene slik:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 =& 5 \\ 3x_1 + 4x_3 =& 7 \\ x_2 + 2x_4 =& 6 \\ 3x_2 + 4x_4 =& 8 \end{aligned}$$

Det mest effektive i dette tilfellet er kanskje å si at dersom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

er

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 7 Vi kjører taylorutvikling, og beregner

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x+x^3-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6/2+\cdots}{x^3(1+1/3!)-x^5/5!+\cdots}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6/2+\cdots}{x^3(1+1/3!)-x^5/5!+\cdots}\cdot\frac{1/x^3}{1/x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^3/2+\cdots}{(1+1/3!)-x^2/5!+\cdots} = \frac{1}{1+1/3!} = \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

Oppgave 8 Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er konvergent dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Dersom

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$$

er

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = L_1 + L_2.$$

Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n + y_n - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned}|x_n + y_n - L_1 - L_2| &=\\ |x_n - L_1 + y_n - L_2| &\leq\\ |x_n - L_1| + |y_n - L_2|\end{aligned}$$

Siden z konvergerer mot L_1, og w mot L_2, kan vi velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|y_n - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $n < N$ at

$$|x_n - L_1 + y_n - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise.

Oppgave 9 Partialsummene er

$$S_N = \sum_{n=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N,$$

og hvis vi tar

$$\begin{aligned}(1-x)S_N &= (1-z)\sum_{n=0}^{N} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N \\ &- (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}) = 1 - x^{N+1}\end{aligned}$$

får vi

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Dersom $|x| < 1$ og vi lar $N \to \infty$, får vi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$