Her er er en samling med fysiske anvendelser jeg har brukt i forbindelse med ordinære differensiallikninger, organisert etter matematisk modell.

# 1 Eksponensiell avslapning: $\dot{x} + \lambda x = \lambda f$

Den enkleste likningen er

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \qquad x(0) = x_0$$

med løsning $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$. Størrelsen $1/\lambda$ kalles **tidskonstanten**. Med en kilde $f$ på høyresiden blir likningen

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = \lambda f(t),$$

og integrerende faktor $e^{\lambda t}$ gir

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s)\, ds.$$

Tabellen viser fysiske systemer som leder til denne likningen.

| System | Ukjent | $\lambda$ |
|---|---|---|
| Radioaktiv nedbrytning, C-14 | antall kjerner $N(t)$ | desintegrasjonskonstanten |
| Trykk i en gassøyle | trykket $p(h)$ | $mg/Tk$ |
| Bakterier som deler seg | antall bakterier $x(t)$ | $-$vekstraten |
| Ammonitt | bredden $b(\theta)$ på kamrene | $-$vekstraten per radian |
| Newtons avkjølingslov | temperaturen $T(t)$ | $\alpha$ |
| RC-krets | spenningen $x(t)$ over kondensatoren | $1/RC$ |
| RL-krets | strømmen $i(t)$ | $R/L$ |
| Ølboks med hull | vannstanden $h(t)$ | tilpasses måledata |
| Lys i absorberende medium | intensiteten $I(z)$ | $n\sigma$ |

## Radioaktiv nedbrytning

Hver kjerne har samme sannsynlighet per tidsenhet for å desintegrere, så antall desintegrasjoner per tidsenhet er proporsjonalt med antall kjerner som er igjen:

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t).$$

Her kalles $\lambda$ **desintegrasjonskonstanten** eller **nedbrytningskonstanten**. Karbondatering er en god inngang.[1] C-14 har halveringstid på omtrent 5700 år, og forholdet mellom C-14 og C-12 i en død organisme gir alderen. Måler vi $t$ i år, er $\lambda = (\ln 2)/5700$, og løsningen er

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/5700}.$$

La oss finne ut omtrent når et dyr avgikk med døden dersom liket inneholder en tiendedel av min C-14-konsentrasjon. (Jeg lever ennå.) Nå er det irrelevant hva $N_0$ er, så lenge vi finner det tidspunktet der $N(t)$ er nede i en tiendedel av $N_0$, som gir likningen

$$\frac{1}{10} = 2^{-t/5700} \qquad \text{eller} \qquad \text{DYRETS DØD} = t = 5700\,\frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_dating`

Dyret døde altså for om lag 19000 år siden. Dette er omtrentlig, for C-14-konsentrasjonen var ikke den samme da som nå, og forskere krangler ennå om hva det nøyaktige C-14-innholdet i atmosfæren har vært de siste 50000 årene. C-14 dannes når nøytroner fra kosmisk stråling kræsjer med N-14-isotoper høyt oppe i troposfæren, men et par atombombesprengninger (som produserer mye C-14) og massevis av $CO_2$ fra fossilt brennstoff (som produserer mye C-12) har gjort alt litt komplisert.

Tritium[2] har halveringstid på 12 år og 3 måneder. Dersom $t$ måles i år, skal mengden tritium halveres hver gang det har gått $12.25$ år, så desintegrasjonskonstanten $\lambda$ til tritium må tilfredsstille

$$\frac{1}{2} = e^{-12.25\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/12.25 \approx 0.057$.

## Trykket i en gassøyle

Her er den uavhengige variabelen høyden $h$ og ikke tiden. La oss finne ut hvordan trykket varierer med høyden i en høy og tynn sylinder dersom den er fylt av en ideell gass.[3] Jeg skal bruke den ideelle gasslov[4]

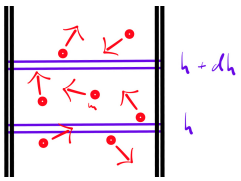
$$pV = NTk.$$

Hvis vi antar at trykkforskjellen mellom $h$ og $h + dh$ kun skyldes vekten av gassen mellom disse to høydene, kan vi skrive (trykket er høyere ved $h$ enn ved $h + dh$)

$$p(h) - p(h + dh) = \frac{mgN}{V}\, dh$$

der $N$ er antall gassmolekyler mellom $h$ og $h + dh$, $m$ er massen til hvert molekyl, og $g$ er tyngdeakselerasjonen. Jeg har også brukt at arealet av tverrsnittet kan skrives $V/dh$, der $V$ er volumet mellom $h$ og $h + dh$. La oss nå bruke den ideelle gasslov, som gir $N/V = p/Tk$, og dele på $dh$:

$$\frac{p(h + dh) - p(h)}{dh} = -\frac{mgp}{Tk}$$




Dersom vi lar $dh \to 0$ og antar at $T$ er konstant, får vi differensiallikningen

$$p'(h) = -\frac{mg}{Tk}\, p(h).$$

Likningen er den samme som for radioaktiv nedbrytning, med $mg/Tk$ i rollen til $\lambda$ og $h$ i rollen til $t$, så trykket som funksjon av høyden er

$$p(h) = p_0 e^{-mgh/Tk}$$

der $p_0$ er trykket i bunnen av sylinderen. Løsningen kalles den barometriske høydeformelen. Bruker vi den som modell for trykket i atmosfæren, der $h$ er høyden over havet og $p_0$ er trykket ved havoverflaten, er lengden $Tk/mg$ omtrent åtte kilometer for luft. Denne modellen er ikke så god, blant annet fordi temperaturen i atmosfæren ikke er konstant.[5]

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_hydrogen
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law
[4] Jeg skriver $NTk$ i stedet for $NkT$. Det er lettere å huske siden det rimer på "NTH".
[5] https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_40.html

## Bakterier som deler seg

Med motsatt fortegn på $\lambda$ får vi vekst i stedet for avslapning. Prokaryoter og mange typer sopp (for eksempel ølgjær) deler seg ved såkalt avsnøring; dette betyr at de kloner seg selv fra tid til annen.[6] *E. coli* deler seg for eksempel omtrent hvert tjuende minutt ved vår kroppstemperatur 310 K. La $x(t)$ være antall bakterier ved tiden $t$. Dersom bakteriene alltid deler seg i to etter det samme tidsintervallet, er endringen $\dot{x}(t)$ proporsjonal med antall bakterier $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \qquad x(0) = x_0$$

I biologi kalles $\lambda$ **vekstraten**. Dersom $t$ måles i 20-minutters inkrementer, blir $\lambda = \ln 2$, slik at

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(\ln 2)t} = x_0 2^t.$$

Dersom $t$ måles i sekunder,[7] skal antall bakterier dobles hver gang det har gått $1200$ sekunder. Vi kan egentlig gjøre det enkelt og si at det skal dobles fra $t = 0$ til $t = 1200$:

$$2 = e^{1200\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/1200$. Bildene er skjermdumper fra en film av en koloni som vokser.[8]



## Ammonitten

Bildet til høyre viser en ammonitt. La $b(\theta)$ være bredden på kamrene som funksjon av vinkelen $\theta$. Dersom skallet beholder formen mens det vokser, er endringsraten til bredden proporsjonal med bredden:

$$b'(\theta) = \lambda b(\theta) \qquad \text{så} \qquad b(\theta) = b_0 e^{\lambda\theta}.$$

På bildet blir kamrene omtrent dobbelt så brede for hver omdreining, så $\lambda \approx \ln(2)/2\pi \approx 0.11$.



## Newtons avkjølingslov

Dette er oppgave 6 fra eksamen i SIF5003 Matematikk 1, 8. desember 1999, den gangen det var lov å lage artige eksamensoppgaver:[9]

> Når strømmen går klokken 00.00 den 1. januar år 2000, sitter Kjell Magne på sitt kontor som da holder temperaturen $19.0°$C. Fra dette tidspunktet avtar temperaturen på kontoret i samsvar med Newtons avkjølingslov: Temperaturendringen pr. tidsenhet er proporsjonal med differansen mellom inne- og utetemperatur. Utetemperaturen denne rekordkalde natten er $-36.9°$C. Klokken 01.00 er temperaturen på kontoret falt til $10.8°$C.

[6] `https://snl.no/celledeling`

[7] SI-enheter har en viss forrang over andre enheter; en gang krasjet visst en ubemannet marssonde fordi en gjeng med amerikanere hadde skrevet noe software der det var brukt fot og pund i stedet for meter og kilogram.

[8] `https://www.youtube.com/watch?v=gEwzDydciWc`

[9] `https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/sif5003_1999-12-08.pdf`

På Kjell Magnes bord står et glass med vann. Hva er klokken når vannet i glasset begynner å fryse?

La $T(t)$ være temperaturen på kontoret $t$ timer etter at strømmen gikk, la $T_0$ være temperaturen ved $t = 0$, og la $T_U$ være utetemperaturen. Newtons avkjølingslov er en litt grov, men ganske nyttig modell som sier at temperaturendringen $\dot{T}(t)$ er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom ute og inne:

$$\dot{T}(t) = \alpha\,(T_U - T(t)) \qquad T(0) = T_0$$

Proporsjonalitetskonstanten $\alpha > 0$ inneholder all informasjon om hvor fort varmen lekker ut gjennom veggene, og varmekapasiteten til kontoret og så videre. Vi organiserer likningen slik

$$\dot{T}(t) + \alpha T(t) = \alpha T_U,$$

som er likningen i innledningen med $x = T$, $\lambda = \alpha$ og $f = T_U$, og ganger med $e^{\alpha t}$ på begge sider av likhetstegnet:

$$e^{\alpha t}\dot{T}(t) + \alpha e^{\alpha t} T(t) = \alpha T_U e^{\alpha t}.$$

Venstresiden er nå nøyaktig det vi får når vi deriverer $e^{\alpha t}T(t)$ med produktregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}T(t)\right) = \alpha T_U e^{\alpha t}.$$

Nå integrerer vi begge sider og får

$$e^{\alpha t}T(t) = T_U e^{\alpha t} + c$$

der $c$ er en vilkårlig konstant. Ganger vi med $e^{-\alpha t}$ på begge sider, står $T(t)$ alene:

$$T(t) = T_U + ce^{-\alpha t}.$$

Initialkravet $T(0) = T_0$ gir $T_0 = T_U + c$, altså $c = T_0 - T_U$, og vi sitter igjen med

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U)\,e^{-\alpha t}.$$

Når $t$ går mot uendelig, går $T(t)$ mot $T_U$, så kontoret ender til slutt opp like kaldt som ute. Løsningsteknikken kalles integrerende faktor, men det er et litt misvisende navn, for penn-og-papir-løsningsteknikker for differensiallikninger består stort sett i å gange likningen med et eller annet og integrere. Dette prinsippet er enkelt å forstå, men det tar en del trening å trene opp et øye for hva man skal gange med for å klare å integrere. Med $T_0 = 19.0$ og $T_U = -36.9$ er

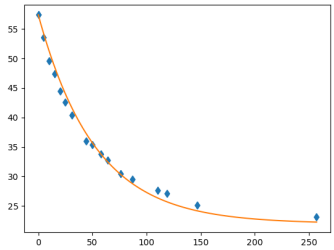
$$T(t) = -36.9 + 55.9e^{-\alpha t},$$

og siden $T(1) = 10.8$, er $55.9e^{-\alpha} = 47.7$, altså $\alpha = \ln(55.9/47.7) \approx 0.159$ per time. Vannet begynner å fryse når $T(t) = 0$, altså når $55.9e^{-\alpha t} = 36.9$, som gir

$$t = \frac{\ln(55.9/36.9)}{\ln(55.9/47.7)} \approx 2.62.$$

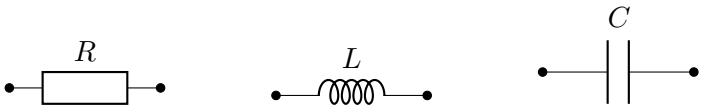
Klokken er da omtrent 02.37.

Jeg har brukt Newtons avkjølingslov med hell et par ganger når jeg skulle brygge øl og ikke hadde spiralkjøler. Vørteren må kjøles fra 373 til 298 K (da skal gjæren oppi), og dette tar noen timer. Dersom du måler temperaturen på minst to forskjellige tidspunkt, kan du estimere $\alpha$ og så gjøre et anslag på når temperaturen er riktig. Dette er gunstig, for da kan man gjøre noe annet i mellomtiden. Figuren viser målte temperaturer i et kar med vann som står til avkjøling, sammen med løsningen av likningen for én verdi av $\alpha$. Den beste verdien kan estimeres med minste kvadraters metode.



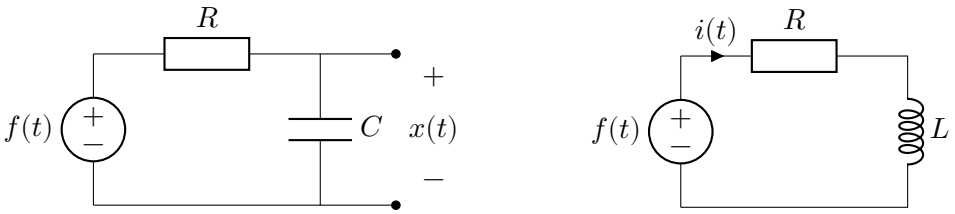

## RC- og RL-kretsen

Nå tar vi en helt annen modell som leder til nøyaktig samme differensiallikning. En elektrisk krets er satt sammen av elementer der det er en fast sammenheng mellom strømmen $i(t)$ gjennom elementet og spenningen $v(t)$ over det. De tre lineære elementene er motstanden, spolen og kondensatoren:




| motstand | spole | kondensator |
|---|---|---|
| $v = Ri$ | $v = L\dot{i}$ | $i = C\dot{v}$ |

Kirchhoffs spenningslov sier at spenningene rundt en lukket sløyfe summerer til null. En motstand og en kondensator i serie med en spenningskilde $f(t)$ kalles en RC-krets, og med en spole i stedet for kondensatoren får vi en RL-krets:




I RC-kretsen går samme strøm $i = C\dot{x}$ gjennom motstanden og kondensatoren, der $x$ er spenningen over kondensatoren. Kirchhoffs spenningslov gir $f = Ri + x$, altså

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{RC}x(t) = \frac{1}{RC}f(t).$$

I RL-kretsen gir samme lov $f = Ri + L\dot{i}$, altså

$$\dot{i}(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{1}{L}f(t).$$

La oss først skru av kilden og sette $f = 0$ i RC-kretsen:

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{RC}x(t) = 0 \qquad x(0) = x_0$$

med løsning $x(t) = x_0 e^{-t/RC}$. Når $t$ går mot uendelig, går $x(t)$ mot null, så med kilden skrudd av lades kondensatoren ut gjennom motstanden. Er kilden i stedet et nivolts batteri som kobles til ved $t = 0$, lades kondensatoren opp mot ni volt med tidskonstanten $RC$.

### Tidskonstanten

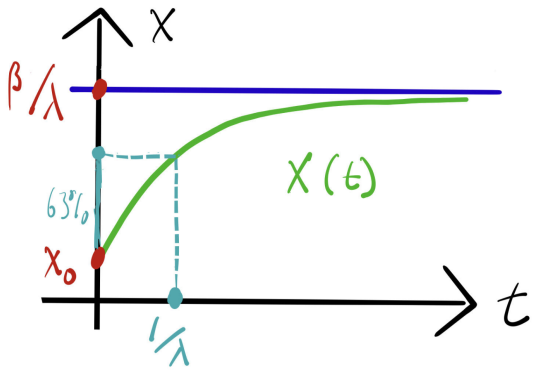
Med en konstant kilde $\lambda f = \beta$ er ett og samme initialverdiproblem

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = \beta \qquad x(0) = x_0$$

med løsning

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda}$$

en modell for så mange forskjellige ting at det er galskap å bli ingeniør uten å lære seg det. Til høyre er et generisk plot.




Siden $1/e \approx 0.36787944117$, ser vi at ved $t = 1/\lambda$, altså etter én tidskonstant,[10] har $x$ nådd om lag 63 prosent av veien fra $x_0$ til $\beta/\lambda$. Dette initialverdiproblemet er forresten et eksempel på et **lineært tidsinvariant system**,[11] og hvis du sier til en gammel ingeniør at du har et LTI-system med tidskonstant sånn og sånn, vil figuren over umiddelbart dukke opp på vedkommendes hjernebark. Kontoret til Kjell Magne har tidskonstant $1/\alpha \approx 6.3$ timer, RC-kretsen har tidskonstant $RC$ og RL-kretsen $L/R$. For radioaktiv nedbrytning er tidskonstanten $1/\lambda$, altså halveringstiden delt på $\ln 2$: omtrent 8200 år for C-14 og 17.7 år for tritium. I trykkmodellen er det høyden som spiller rollen til tiden, så der er tidskonstanten en høyde, nemlig $Tk/mg$, som er omtrent 8 kilometer for luft.

### Lavpassfilteret

RC-kretsen kalles et **lavpassfilter** når spenningen over kondensatoren brukes som utsignal. Med kilden skrudd på gir integrerende faktor

$$e^{t/RC}x(t) - x_0 = \frac{1}{RC}\int_0^t f(s)e^{s/RC}\,ds,$$

og løser vi for $x(t)$, får vi spenningen over kondensatoren:

$$x(t) = x_0 e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_0^t f(s)e^{-(t-s)/RC}\,ds.$$

Integralet kalles en **folding** eller **konvolusjon**. Et relevant regneeksempel for studenter som skal gjennom kretsteori, er $f(t) = \cos(t)$ og $x_0 = 0$. Da gir formelen over

$$x(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t \cos(s)e^{-(t-s)/RC}\,ds = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds.$$

Integralet regner vi ut med delvis integrasjon to ganger, der vi begge ganger deriverer $e^{s/RC}$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds &= \sin(t)e^{t/RC} - \frac{1}{RC}\int_0^t \sin(s)e^{s/RC}\,ds \\ &= \sin(t)e^{t/RC} + \frac{1}{RC}\cos(t)e^{t/RC} - \frac{1}{RC} - \frac{1}{(RC)^2}\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds.\end{aligned}$$

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Time_constant
[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_system

Nå er vi tilbake til integralet vi startet med, så vi kan løse likningen for det:

$$\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds = \frac{RC\left(\cos(t) + RC\sin(t)\right)e^{t/RC} - RC}{1 + (RC)^2}.$$

Ganger vi med $e^{-t/RC}$ og deler på $RC$, får vi

$$x(t) = \frac{\cos(t) + RC\sin(t) - e^{-t/RC}}{1 + (RC)^2}.$$

Leddet med $e^{-t/RC}$ dør ut, og igjen står en svingning med samme frekvens som kilden. Dette integralet blir enklere å regne med Eulers formel, så det er lurt å vende tilbake til det. Sender vi inn $f(t) = e^{i\omega t}$, der $i$ nå er den imaginære enheten, blir den stasjonære løsningen $H(i\omega)e^{i\omega t}$ med

$$H(i\omega) = \frac{\lambda}{\lambda + i\omega} \qquad \lambda = \frac{1}{RC},$$

så høye frekvenser dempes mer enn lave. Med $\omega = 1$ er realdelen av $H(i)e^{it}$ nettopp svingningen som sto igjen over.

### Periodisk påtrykk: gjæringsdunken

Professor Lie skal gjære pilsnerøl ved ti grader, men har bare null grader på verandaen og tjue grader i stuen. Han flytter derfor gjæringsdunken ut og inn med fast periode $T$. Med Newtons avkjølingslov er temperaturen $x(t)$ i dunken gitt ved

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = \alpha f(t),$$

der omgivelsestemperaturen $f$ er en firkantbølge som veksler mellom $20$ og $0$. Dunken er et lavpassfilter som glatter ut firkantbølgen, og temperaturen svinger rundt ti grader. Timeren som varsler når dunken skal flyttes, piper med en stygg firkantbølgelyd. Sendes spenningen fra timeren gjennom RC-kretsen over, er det nøyaktig samme likning som demper overtonene i pipelyden. Parallellen mellom de to er poenget med eksempelet.

### Variable koeffisienter: potmeteret

Det er vanlig å utvide teknikken med integrerende faktor til også å inkludere initialverdiproblemer på formen

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t) \qquad x(0) = x_0$$

som oppstår dersom du for eksempel bytter ut motstanden i RC-kretsen med et potmeter som du skrur på mens strømmen går, eller kondensatorplater som endrer avstand over tid eller noe annet slikt. Løsningsteknikken er den samme, men den integrerende faktoren er mer komplisert:

$$\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$$

Prosedyren gir

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right) + \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right)\int_0^t f(u)\exp\left(\int_0^u a(s)\,ds\right)\,du \\ &= x_0 \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right) + \int_0^t f(u)\exp\left(-\int_u^t a(s)\,ds\right)\,du, \end{aligned}$$

men det er antagelig enklere for studentene om vi presenterer teknikken gjennom eksempler. Jeg kommer bare på ett eksempel jeg har hatt bruk for i grunnutdanninga – det som dukker opp når man regner ut fourieromvendingen til standardnormalfordelingen:

$$\dot{x}(t) + tx(t) = 0$$

Her er $f = 0$ og $a(t) = t$. Da er

$$\int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t s\, ds = \frac{t^2}{2},$$

så den integrerende faktoren er $e^{t^2/2}$, og formelen over gir

$$x(t) = x_0 e^{-t^2/2}$$

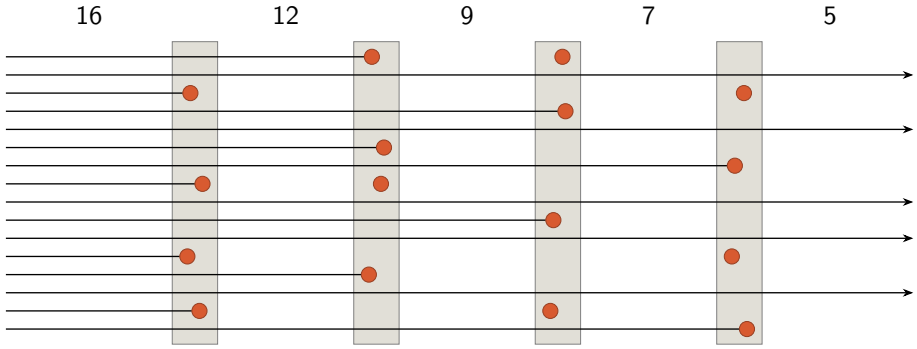
der $x_0 = x(0)$.

## Lys gjennom et absorberende medium

En stråle med tverrsnittsareal $A$ og intensitet $I$ går gjennom et medium med $n$ partikler per volumenhet. Hver partikkel skygger for et areal $\sigma$, ekstinksjonstverrsnittet. Et sjikt med tykkelse $dz$ inneholder $nA\,dz$ partikler som til sammen dekker arealet $\sigma nA\,dz$, så andelen av strålen som fjernes er $n\sigma\,dz$. Dermed er

$$I'(z) = -n\sigma I(z) \qquad I(z) = I_0 e^{-n\sigma z},$$

som er Beer–Lamberts lov. Figuren viser fire like sjikt som hvert fjerner omtrent en firedel av strålene som når fram.



# 2 Separable likninger: fallskjerm, Torricelli og reaksjonshastighet

Når endringsraten avhenger ikkelineært av tilstanden, men ikke av tiden, er likningen

$$\dot{x}(t) = g(x(t))$$

separabel. Her er fire eksempler der løsningen kan skrives opp, og der den oppfører seg kvalitativt annerledes enn eksponentialfunksjonen i forrige kapittel.

## Fallskjermlikningen

En fallskjermhopper med masse $m$ påvirkes av tyngden $mg$ og en luftmotstand som er kvadratisk i farten: $m\dot{v} = mg - kv^2$. Måler vi farten i enheter av terminalfarten $\sqrt{mg/k}$ og tiden i enheter av $\sqrt{m/gk}$, står det

$$\dot{v} = 1 - v^2.$$

Løsningen med $v(0) = 0$ er $v(t) = \tanh t$. Likevektsløsningen $v = 1$ er stabil og $v = -1$ er ustabil, og eksempelet er en grei inngang til likevektspunkter og stabilitet uten at man trenger systemer. Likningen egner seg også som testproblem for numeriske løsere.

## Torricellis lov

I en modelleringsforelesning lagde jeg et enkelt eksperiment: Jeg stakk hull i bunnen på en tom ølboks, skar ut en loddrett stripe i siden og teipet over, slik at man kunne se vannstanden $h(t)$ mens boksen tømtes. Så prøvde jeg to modeller. I den første antar vi bare at endringsraten til vannstanden er proporsjonal med vannstanden:

$$\dot{h}(t) = -\lambda h(t) \qquad h(0) = h_0.$$

Dette er likningen fra forrige kapittel, så løsningen er

$$h(t) = h_0 e^{-\lambda t}.$$

I den andre antar vi at den kinetiske energien til hvert vannmolekyl som går ut gjennom hullet, er hentet fra den potensielle energien til et tilsvarende vannmolekyl i det øverste laget i boksen. Har molekylet masse $m$ og fart $v$ ut av hullet, betyr det at

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

der $g$ er tyngdeakselerasjonen. Dette gir **Torricellis lov**:[12]

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Vannet kommer altså ut av hullet like fort som om det hadde falt fritt fra overflaten. Vannvolumet i boksen er $Bh(t)$, der $B$ er arealet av tverrsnittet til boksen, og det minker med $Av$ per tidsenhet, der $A$ er arealet av hullet:

$$B\dot{h}(t) = -A\sqrt{2gh(t)} \qquad h(0) = h_0.$$

[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law`

Prinsippet om å gange likningen med et eller annet og integrere virker fremdeles, det bare heter separabel likning i stedet. Vi deler på $2B\sqrt{h(t)}$:

$$\frac{\dot{h}(t)}{2\sqrt{h(t)}} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

Venstresiden er nå nøyaktig det vi får når vi deriverer $\sqrt{h(t)}$ med kjerneregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt}\sqrt{h(t)} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

Nå integrerer vi begge sider fra $0$ til $t$ og får

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t.$$

Boksen er tom når $\sqrt{h(t)} = 0$, altså etter tømmetiden

$$T = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

og frem til da er

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Den første modellen sier at boksen aldri blir helt tom, mens Torricellis lov sier at vannstanden følger en parabel med bunnpunkt akkurat idet boksen er tom. Jeg fikk en student i hver parallell til å filme vannstanden etter som boksen tømtes og notere ned tidspunkter mot vannstand, og så sjekket vi begge modellene. Det var faktisk den første modellen som spådde vannstanden best – Torricelli gjør noen antagelser som sjelden stemmer, og det er et nyttig eksempel på at den fysisk begrunnede modellen ikke nødvendigvis vinner.

## Logistisk vekst

Modellen for bakterier som deler seg,

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0,$$

spår eksponensiell vekst for all fremtid. Men som David Attenborough i 2013 uttalte under et foredrag i The Royal Geographical Society:
"Anyone who thinks that you can have infinite growth in a finite environment is either a madman or an economist."[13]
Dyr som formerer seg kan sjelden fortsette med det uten å før eller siden oppleve noen som helst form for begrensning i veksten.[14] Den enkleste utvidelsen for å inkorporere dette i modellen, er å erstatte $a$ med en positiv funksjon som har et nullpunkt i den bestanden $x$ som maksimalt kan opprettholdes på området. Hvis vi gjør det enkelt og sier at denne funksjonen skal være en rett linje, får vi det **logistiske problemet**[15]

$$\dot{x}(t) = a\,(1 - x(t)/k)\,x(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0,\ k > 0$$

[13] Sitatets opprinnelse er noe usikker. Det var nok ikke han som fant det på.
[14] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gombe_Chimpanzee_War`
[15] `https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function`

der $k$ er en konstant som kalles **bærekapasiteten**. Vi deler på $(1 - x(t)/k)\,x(t)$ og delbrøksoppspalter:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} + \frac{\dot{x}(t)}{k - x(t)} = a.$$

Så lenge $0 < x(t) < k$, er venstresiden nøyaktig det vi får når vi deriverer $\ln x(t) - \ln(k - x(t))$ med kjerneregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{x(t)}{k - x(t)} = a.$$

Nå integrerer vi begge sider fra $0$ til $t$ og får

$$\ln \frac{x(t)}{k - x(t)} - \ln \frac{x_0}{k - x_0} = at \qquad \text{eller} \qquad \frac{x(t)}{k - x(t)} = \frac{x_0}{k - x_0} e^{at}.$$

Løser vi for $x(t)$, får vi

$$x(t) = \frac{k x_0 e^{at}}{k - x_0 + x_0 e^{at}},$$

som går mot bærekapasiteten $k$ når $t$ går mot uendelig.

## Reaksjonshastighet

Kjemiske reaksjoner kan gå fort og langsomt, og det finnes differensiallikninger som modellerer reaksjonshastighet. Reaksjonshastighet er viktig, for noen reaksjoner bør helst gå fort (for eksempel forbrenning) mens andre bør gå sakte (for eksempel korrosjon). Atmosfæren består av 78 prosent nitrogen og 21 prosent oksygen. Ved vanlig trykk og temperatur reagerer ikke disse, men ved for eksempel lynnedslag eller forbrenning i dieselmotorer eller skogbrann blir det mer fart i dem, og så kombinerer de til nitrogenoksider ($\mathrm{NO_x}$). Det er disse som gir Los Angeles sin berømte smog.[16] I atmosfæren er det mange forskjellige reaksjoner mellom nitrogenoksider og oksygen. En av dem er at nitrogendioksid splitter i nitrogenmonoksid og oksygen:

$$2\mathrm{NO_2(g)} \to 2\mathrm{NO(g)} + \mathrm{O_2(g)}.$$

For at to molekyler skal reagere, må de møtes, og sannsynligheten for det er proporsjonal med produktet av konsentrasjonene. I noen tilfeller går visst reaksjonsraten her som kvadratet av konsentrasjonen,

$$\frac{d[\mathrm{NO_2}]}{dt} = -k[\mathrm{NO_2}]^2,$$

der **hastighetskonstanten** $k$ er en empirisk konstant som avhenger av trykk og temperatur og de støkiometriske koeffisientene og så videre. Det ryktes på internett at $k = 0.54$ liter per mol per sekund for reaksjonen over ved 300 grader celsius. Deler vi likningen på $-[\mathrm{NO_2}]^2$, er venstresiden den deriverte av $1/[\mathrm{NO_2}]$, så løsningen er

$$\frac{1}{[\mathrm{NO_2}]} - \frac{1}{[\mathrm{NO_2}]_0} = kt \qquad \text{eller} \qquad [\mathrm{NO_2}] = \frac{[\mathrm{NO_2}]_0}{1 + k[\mathrm{NO_2}]_0 t}$$

der $[\mathrm{NO_2}]_0$ er konsentrasjonen ved $t = 0$. Starter vi for eksempel med $0.01$ mol per liter, er konsentrasjonen halvert etter $1/(0.54 \cdot 0.01) \approx 185$ sekunder. Konsentrasjonen avtar som $1/t$ og ikke eksponentielt, og halveringstiden avhenger av startkonsentrasjonen. Det kvadratiske leddet i den logistiske modellen kan leses på samme måte: det er raten for møter mellom to individer av samme art.

[16] `https://www.latimes.com/local/la-me-air-pollution-0428-pictures-photogallery.html`

# 3 Den harmoniske oscillatoren: $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$

Andreordens lineære likninger med konstante koeffisienter er den modellen som går igjen flest steder. Uten demping og påtrykk er løsningen

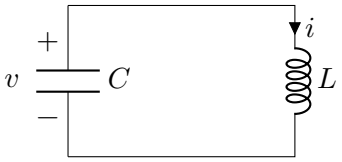
$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Tabellen viser hvordan parametrene skal leses i de forskjellige systemene.

| System | Ukjent | $m$ | $d$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| Kloss og fjær, støtdemper | posisjonen $x$ | masse | dempekonstant | fjærstivhet |
| RCL-krets i serie | spenningen over kondensatoren | $L$ | $R$ | $1/C$ |
| Pendel, små utslag | vinkelen $\theta$ | $ml^2$ | | $mgl$ |
| Stang på torsjonsfjær | vinkelen $\theta$ | $ml^2$ | | $k - mgl$ |
| Skip som ruller | krengevinkelen $\varphi$ | $I$ | | $\Delta GM$ |

### Kloss og fjær og LC-kretsen

Newtons andre lov for en kloss med masse $m$ på en fjær med stivhet $k$ er $m\ddot{x} = -kx$. En spole og en kondensator i sløyfe er det samme systemet:




Spolen har spenningen $v$ over seg, så $L\dot{i} = v$, og strømmen tappes fra kondensatoren, så $C\dot{v} = -i$. Deriverer vi den første likningen og setter inn den andre, står det $L\ddot{i} + \frac{1}{C}i = 0$, med løsning

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\, t\right).$$

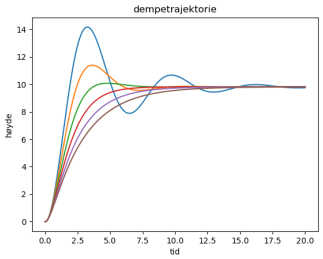
Lader vi opp kondensatoren med et batteri og kobler den til spolen, svinger strømmen med vinkelfrekvensen $1/\sqrt{LC}$, slik klossen svinger med $\sqrt{k/m}$.

### Støtdemperen og RCL-kretsen

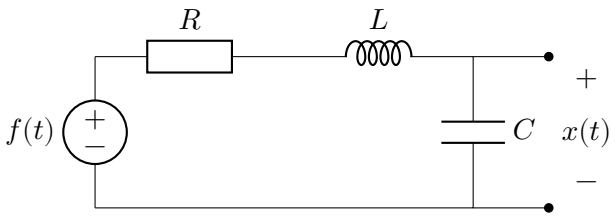
Støtdemperen på en bil er et godt fysisk bilde for den inhomogene likningen: en masse $m$ på fjær og demper, med tyngden som konstant påtrykk,

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = mg.$$

Likevektsløsningen $x = mg/k$ er den konstante partikulærløsningen, og initialkravene $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ svarer til at bilen jekkes opp til fjæren er ubelastet og så slippes. Figuren viser løsningen for seks forskjellige dempekonstanter.



Hele analysen kan gjenbrukes på en motstand, en spole og en kondensator i serie med en spenningskilde $f(t)$:




Med $x$ lik spenningen over kondensatoren er strømmen $i = C\dot{x}$, og Kirchhoffs spenningslov $f = Ri + L\dot{i} + x$ gir

$$L\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + \frac{1}{C}x(t) = \frac{1}{C}f(t).$$

Induktansen spiller rollen til massen, motstanden til dempingen og den inverse kapasitansen til stivheten.

### Pendelen og linearisering

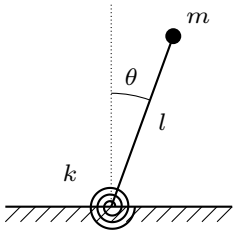
En pendel som henger fra taket og dingler uten friksjon eller luftmotstand, tilfredsstiller ifølge Newtons andre lov

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0,$$

der $\theta$ er vinkelutslaget med loddlinjen, $l$ er pendelens lengde og $g$ er tyngdeakselerasjonen. For små utslag er $\sin\theta \approx \theta$, og vi får den lineariserte pendellikningen $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ med periode $2\pi\sqrt{l/g}$. Pendelen er standardeksempelet på linearisering. En lang pendel i nærheten, som foucaultpendelen i Realfagbygget, gir et eksempel der svaret kan kontrolleres: mål perioden og regn ut lengden.

### Fortegnet på stivheten: stangen og skipet

Vi fester en loddrett og masseløs stang med lengde $l$ til gulvet med en torsjonsfjær med stivhet $k$, og setter en punktmasse $m$ på toppen. Fjæren leverer et moment $k\theta$ som er proporsjonalt med utslagsvinkelen $\theta$ fra loddlinjen og drar stangen tilbake, mens tyngdekraften gir momentet $mgl\sin\theta$, som drar den lenger ut.




Newtons andre lov gir

$$ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\sin\theta(t) - k\theta(t).$$

Ganger vi med $\dot{\theta}(t)$ og integrerer, får vi

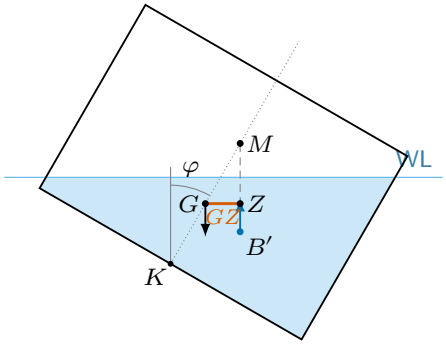
$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\theta(t)^2 + mgl\cos\theta(t) = c.$$

Her er $mgl\cos\theta$ den potensielle energien til massen, siden den sitter $l\cos\theta$ over gulvet, og $\frac{1}{2}k\theta^2$ er energien som er lagret i fjæren. For små utslag er $\sin\theta \approx \theta$, og da står det

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + (k - mgl)\,\theta(t) = 0.$$

Stangen svinger rundt loddlinjen hvis $k > mgl$, og velter hvis $k < mgl$.

Et skip er en slik stang. Tyngdepunktet $G$ ligger $KG$ over kjølen $K$, så krenger skipet vinkelen $\varphi$, gir tyngdekraften momentet $\Delta\, KG \sin\varphi$ om kjølen, der $\Delta = mg$ er vekten av skipet. Fjæren er oppdriften: Den angriper i tyngdepunktet $B'$ til den neddykkede delen av skroget, som flytter seg ut mot den siden som går ned, og gir et moment tilbake. Netto blir det rettende momentet $\Delta\, GZ(\varphi)$, der den **rettende armen** $GZ$ er den vannrette avstanden fra $G$ til virkelinjen til oppdriften.




Newtons andre lov for rotasjon om rulleaksen gir

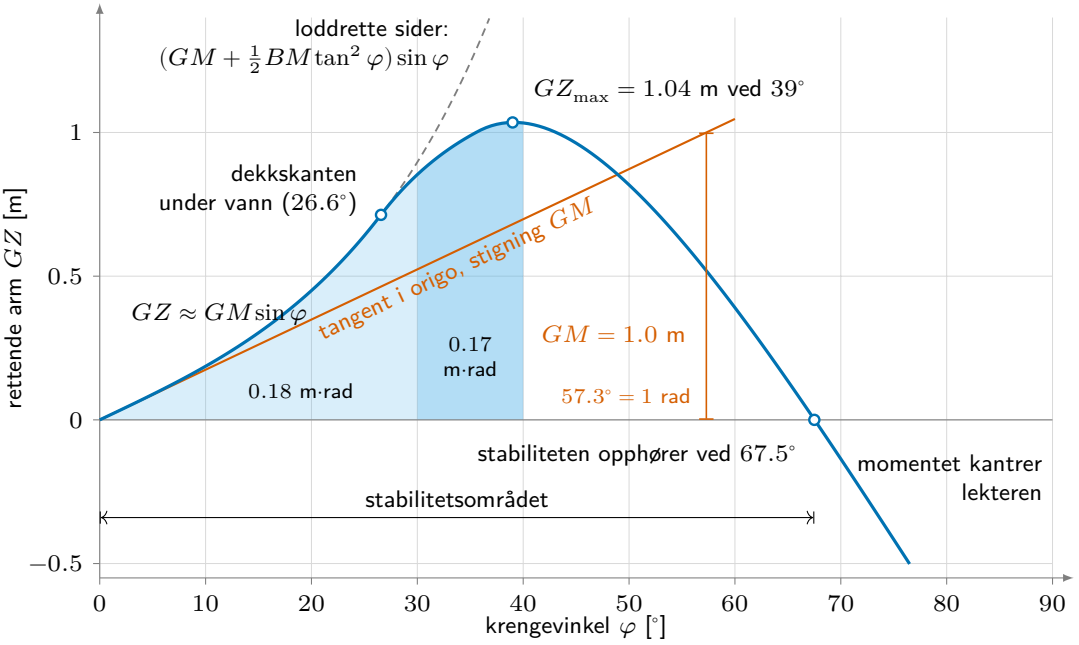
$$I\ddot{\varphi}(t) + \Delta\, GZ(\varphi(t)) = 0$$

der $I$ er treghetsmomentet om rulleaksen. For små vinkler er $GZ \approx GM\sin\varphi$, der **metasenterhøyden**[17] $GM$ er avstanden fra $G$ opp til punktet $M$ der virkelinjen til oppdriften krysser senterlinjen i skipet, og da står det

$$I\ddot{\varphi}(t) + \Delta\, GM\sin\varphi(t) = 0.$$

Dette er pendellikningen med $I$ i rollen til $ml^2$ og $\Delta\, GM$ i rollen til $mgl$, så skipet ruller som en pendel med lengde $I/(m\,GM)$, og ligger $G$ over $M$, velter det akkurat som stangen gjør når $k < mgl$.

For store vinkler må $GZ$ regnes ut fra formen på skroget. Figuren viser $GZ$ som funksjon av krengevinkelen for en lekter formet som en boks, $20$ meter bred, $12$ meter høy og med $7$ meter dypgang, lastet slik at $GM = 1$ meter.




Frem til dekkskanten går under vann ved $26.6°$, følger kurven den stiplede formelen for et skip med loddrette sider, og den ligger over tangenten $GM\varphi$. Så flater den ut, når toppen $1.04$ meter ved $39°$

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height

og krysser null ved $67.5^\circ$. Krenger lekteren mer enn det, kantrer den. Ganger vi rullelikningen med $\dot\varphi(t)$ og integrerer, får vi

$$\frac{1}{2}I\dot\varphi(t)^2 + \Delta\int_0^{\varphi(t)} GZ(\psi)\,d\psi = c.$$

Den potensielle energien er altså vekten av skipet ganger arealet under $GZ$-kurven. Arealet frem til $67.5^\circ$ er $0.65$ m·rad, så en bølge må tilføre energien $0.65\,\Delta$ for å kantre lekteren. Derfor stiller IMO krav til arealet under kurven:[18] minst $0.055$ m·rad frem til $30^\circ$ og minst $0.030$ m·rad mellom $30^\circ$ og $40^\circ$. Lekteren har $0.18$ og $0.17$.

### Frekvensrespons og resonans

Med påtrykket $f(t) = e^{i\omega t}$ er partikulærløsningen $x_p(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}$ der

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}.$$

Nullpunktene til nevneren er systemets poler. Uten demping ligger polene i $\pm i\omega_0$, og påtrykk med frekvensen $\omega_0$ gir en løsning som vokser som $t\sin\omega_0 t$. Tilbakekobling i en elgitar og en ferge som vagges i takt med egenfrekvensen, er eksempler studentene kjenner. I $s$-domenet blir elementlovene $V = RI$, $V = sLI$ og $V = I/sC$, og kretser kan regnes som om de bare besto av motstander. For RCL-kretsen over gir dette

$$X(s) = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC}\,F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}\,F(s).$$

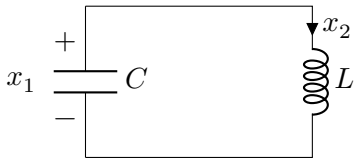
[18] `https://en.wikipedia.org/wiki/International_Code_on_Intact_Stability`

# 4 Systemer og bevarte størrelser: $\dot{x} = f(x)$

Skriver vi en andreordens likning som et system av to førsteordens likninger, blir løsningen en kurve i planet, og spørsmålet blir hvilke kurver løsningene følger. For flere fysiske systemer finnes det en funksjon $E$ som er konstant langs løsningene, slik at løsningskurvene er nivåkurver for $E$. I fysikken heter denne funksjonen energi. Eksemplene kan brukes både for systemer av differensiallikninger, for nivåkurver og gradienter, og som testproblemer for numeriske metoder. De tre siste eksemplene er lineære systemer uten noen bevart størrelse, der det er egenverdiene til matrisen som bestemmer oppførselen.

## LC-kretsen

La $x_1$ være spenningen over kondensatoren og $x_2$ strømmen gjennom spolen, med retninger som i figuren.




Elementlovene gir

$$C\dot{x}_1 = -x_2 \qquad L\dot{x}_2 = x_1,$$

og energien

$$E = \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2$$

er konstant, siden $\dot{E} = Cx_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 = 0$. Løsningene går rundt på ellipser. Kondensatoren driver strøm gjennom spolen, spolen lader kondensatoren opp igjen med motsatt fortegn, og energien skvulper frem og tilbake mellom dem. I de skalerte variablene $\sqrt{C}\,x_1$ og $\sqrt{L}\,x_2$ er ellipsene sirkler, og løsningen er en rotasjon med vinkelhastighet $1/\sqrt{LC}$. Kretsen er derfor også en inngang til rotasjonsmatriser og matriseeksponentialen.

## Pendelen og kloss og fjær

Prinsippet om å gange likningen med et eller annet og integrere virker også på pendellikningen

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0.$$

Her er $ml^2\dot{\theta}(t)$, der $m$ er massen til pendelen, en fornuftig integrerende faktor, siden vi kan integrere og få

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}(t)\right)^2 - mgl\cos\theta(t) = c$$

der $c$ er en konstant. Venstresiden er summen av kinetisk og potensiell energi, så her har vi likningen for konservert energi. Energibevaring følger altså av Newtons andre lov, og trenger ikke postuleres. (Jeg lurte fælt på dette da jeg gikk på gymnaset.) For kloss og fjær gir samme regning $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$. Med $q$ for posisjon og $p$ for bevegelsesmengde er begge systemene på formen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

der **hamiltonfunksjonen** $H$ er totalenergien, altså summen av kinetisk og potensiell energi. Differansen mellom kinetisk og potensiell energi kalles **lagrangefunksjonen**. For pendelen kan vi ta $q = \theta$ og $p = \dot{\theta}$, og da er $H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{g}{l}\cos q$ energien delt på $ml^2$. Legger vi til luftmotstand som er lineær i farten,

$$\dot{q} = p \qquad \dot{p} = -\frac{g}{l}\sin q - ap,$$

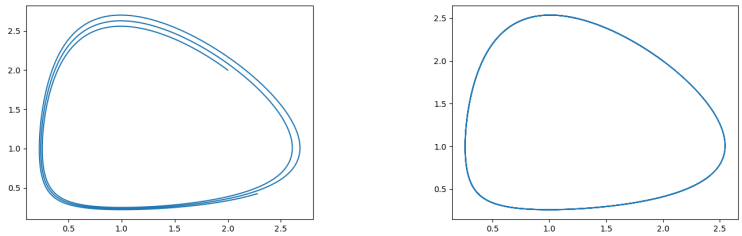
blir $\dot{H} = -ap^2$, og løsningene spiraler inn mot likevektspunktet.

## Lotka–Volterra

Snøskohare og kanadisk gaupe er standardeksempelet på et system som ikke er mekanisk, men som likevel har en bevart størrelse. Med alle parametre lik $1$ er systemet

$$\dot{x} = x - xy \qquad \dot{y} = -y + xy,$$

og funksjonen $x + y - \ln|x| - \ln|y|$ er konstant langs løsningene. Dette førsteintegralet har ingen opplagt tolkning, og det er poenget med å ta det før pendelen.



Figurene viser hvorfor bevarte størrelser er nyttige for numerikk. Til venstre er systemet løst med Eulers eksplisitte metode,

$$x_{n+1} = x_n + hx_n\,(1 - y_n) \qquad y_{n+1} = y_n + hy_n\,(x_n - 1)\,,$$

og løsningen spiraler utover på tvers av nivåkurvene. Til høyre er $x_n$ byttet ut med $x_{n+1}$ i den andre likningen,

$$x_{n+1} = x_n + hx_n\,(1 - y_n) \qquad y_{n+1} = y_n + hy_n\,(x_{n+1} - 1)\,,$$

og løsningen holder seg på en lukket kurve. Denne varianten kalles **symplektisk Euler**. Det samme forsøket kan gjøres med pendelen, der størrelsen man overvåker er totalenergien.

## Tolegemeproblemet

Newtons andre lov kombinert med gravitasjonsloven gir for en planet rundt en stjerne med masse $m$ i origo

$$\ddot{x} = -Gm\frac{x}{|x|^3}.$$

Energien $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - Gm/|x|$ og dreieimpulsen $x \times \dot{x}$ er bevart, og banene er kjeglesnitt. Systemet er en fin numerisk øvelse: først med stjernen i ro, så med to legemer som begge beveger seg, og så med flere planeter.

### Stivt legeme

Vinkelhastighetene $\omega_k$ om hovedaksene til et stivt legeme som roterer fritt, tilfredsstiller eulerlikningene

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \qquad I_2\dot{\omega}_2 = (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \qquad I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$$

der $I_k$ er treghetsmomentene. Dette er et ikkelineært system med tre ukjente og to bevarte størrelser, den kinetiske energien $\frac{1}{2}\sum_k I_k\omega_k^2$ og kvadratet av dreieimpulsen $\sum_k I_k^2\omega_k^2$, så løsningene ligger på skjæringskurven mellom to ellipsoider.

### To legemer som utveksler varme: elgtungen

La oss si at du tar en nytrekt elgtunge med temperatur på 88 grader og nedsenker den i en bøtte med vann fra springen på 4 grader (dette er nødvendig om det skal gå lett å dra av skinnet) og setter bøtta ut på verandaen, der det er 0 grader. Da gir Newtons avkjølingslov differensiallikningene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1\,(x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= \alpha_1\,(x_1 - x_2) + \alpha_2\,(0 - x_2)\end{aligned}$$

der $x_1$ er temperaturen i elgtungen, $x_2$ er temperaturen i vannet, $\alpha_1$ er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og tungen og $\alpha_2$ er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen. Her er det antatt at tungen og vannet har samme varmekapasitet. Høyresiden er et matriseprodukt $A\mathbf{x}$ der

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Vi setter $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, slik at vi får et håndterlig system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= \phantom{-}x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Dette kalles et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**, og med den ukjente sortert i en søylevektor blir det

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La oss prøve gjetningene $x_1(t) = c_1e^{\lambda t}$ og $x_2(t) = c_2e^{\lambda t}$, altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{c} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og se hva som skjer. Setter vi $\mathbf{x}$ inn i systemet, får vi $\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{c}$ på den ene siden og $A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}A\mathbf{c}$ på den andre. Setter vi disse lik hverandre og deler ut $e^{\lambda t}$ som vi pleier, får vi

$$\lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{eller} \qquad \lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}.$$

Med andre ord må $\mathbf{c}$ være en av $A$ sine egenvektorer og $\lambda$ den korresponderende egenverdien om $\mathbf{x}$ som foreslått skal være en løsning. En to ganger to matrise har karakteristisk polynom av orden 2, så det kan være maksimalt to egenverdier, og i $\mathbb{R}^2$ er det ikke "plass til" mer enn to lineært uavhengige

egenvektorer, så mennesker som ikke er på galehuset vil forvente to lineært uavhengige løsninger. Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(-2-\lambda)-1 \\ &= (1+\lambda)(2+\lambda)-1 \\ &= 1+3\lambda+\lambda^2\end{aligned}$$

som har røtter

$$\lambda = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2},$$

slik at

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix} + a_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

Nå går det an å vise at dette er alle løsninger du noensinne kommer til å finne, men det er nok litt i tidligste laget i et førsteårskurs. Hvis vi nå for eksempel ønsker å finne ut når temperaturen i vannet er 13 grader, får vi en fin uløselig likning. Initialkravet er $x_1(0) = 88$ og $x_2(0) = 4$, så konstantene må tilfredsstille

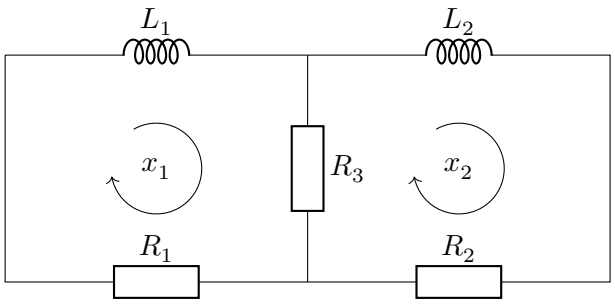
$$a_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 4\end{pmatrix}$$

som gir $a_1 \approx -32.73$ og $a_2 \approx -11.27$. Vanntemperaturen er

$$x_2(t) = a_1\left(1-\sqrt{5}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t/2} + a_2\left(1+\sqrt{5}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t/2}.$$

Likningen $x_2(t) = 13$ lar seg ikke løse med penn og papir siden $x_2$ er en lineærkombinasjon av to forskjellige eksponensialfunksjoner, men numerisk går det fint. Vannet er innom 13 grader allerede ved $t \approx 0.14$, men da er det på vei opp – toppen er om lag 25 grader ved $t \approx 0.8$. Så kjøler det seg ned igjen, og er tilbake på 13 grader ved $t \approx 3.0$.

En krets med to sløyfer, to spoler og tre motstander gir et system på samme form:




Med sløyfestrømmene $x_1$ og $x_2$ som ukjente gir Kirchhoffs spenningslov på hver sløyfe

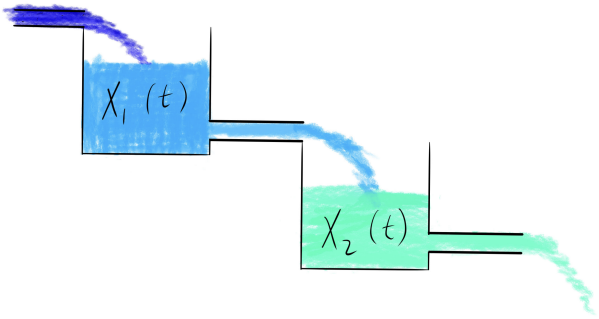
$$L_1\dot{x}_1 = -(R_1+R_3)\,x_1 + R_3x_2 \qquad L_2\dot{x}_2 = R_3x_1 - (R_2+R_3)\,x_2.$$

Med $L_1 = L_2 = 1$, $R_2 = R_3 = 1$ og $R_1 = 0$ er dette nøyaktig systemet over, så sløyfestrømmene oppfører seg som temperaturene i tungen og vannet.

### Strømning mellom to tanker

La $x_1(t)$ og $x_2(t)$ være konsentrasjonene av et eller annet stoff i to tanker som er koblet slik:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = \quad x_1 - x_2$$



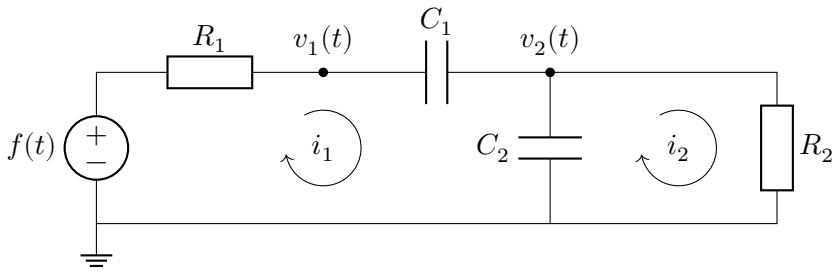

Her kommer det rent vann inn i den øverste tanken, og vi antar det er perfekt blanding i begge tanker, og så har jeg satt farten til én liter per sekund og volumet i hver tank til én liter, slik at systemet skal bli pent og pyntelig. Matrisen i dette systemet er ikke diagonaliserbar, men vi kan løse det med integrerende faktor (begynn med den første likningen):

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$$
$$x_2(t) = (x_2(0) + x_1(0)t)e^{-t}.$$

Faktoren $t$ kommer av at løsningen av den første likningen blir påtrykt i den andre, som har samme tidskonstant.

### Båndpassfilteret

To motstander og to kondensatorer som kobles til en spenningskilde slik, kalles et båndpassfilter om spenningen måles i punktet markert $v_2(t)$:




Kondensatoren $C_1$ slipper ikke gjennom likestrøm, og $C_2$ kortslutter høye frekvenser, så det er bare frekvensene imellom som når frem til $v_2$. Med sløyfestrømmene $i_1$ og $i_2$ gir Kirchhoffs spenningslov på hver sløyfe

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int (i_1(t) - i_2(t))\,dt = f(t)$$
$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2}\int (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0.$$

Det er også klart at

$$v_2(t) = R_2 i_2(t) = \frac{1}{C_2}\int (i_1(t) - i_2(t))\,dt \qquad \text{og at} \qquad v_1(t) = v_2(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt.$$

Nå kan vi kvitte oss med strømmene. Setter vi de to siste relasjonene inn i den første sløyfelikningen, kollapser den til

$$R_1 i_1(t) + v_1(t) = f(t) \qquad \text{slik at} \qquad i_1(t) = \frac{f(t) - v_1(t)}{R_1},$$

og Ohms lov gir

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2}.$$

Deriverer vi kondensatorrelasjonene, står det

$$\dot{v}_2 = \frac{i_1 - i_2}{C_2} \qquad \text{og} \qquad \dot{v}_1 = \dot{v}_2 + \frac{i_1}{C_1}.$$

Vi ganger spenningen over hver kondensator med $R_1$ og kapasitansen og setter

$$x_1(t) = R_1 C_1 (v_1(t) - v_2(t)) \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = R_1 C_2 v_2(t).$$

Da er $\dot{x}_1 = R_1 i_1$ og $\dot{x}_2 = R_1(i_1 - i_2)$, og setter vi inn strømmene, er systemet der:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2 + f \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \left( \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) x_2 + f,
\end{aligned}$$

eller på matriseform:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{R_1 C_1} & -\dfrac{1}{R_1 C_2} \\ -\dfrac{1}{R_1 C_1} & -\dfrac{1}{R_1 C_2} - \dfrac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} f.$$