ÉN LIKNING, MANGE FYSISKE SYSTEMER

Dette kompendiet er en samling av fysikkeksempler jeg har forelest over årene. Det er skrevet for kolleger som underviser matematikk for ikke-matematikere, og som trenger eksempler der fysikken er enkel nok til å forklares på fem minutter og matematikken er den som står i pensumlisten i et typisk matematikkemne her på NTH. Eksemplene er ordnet etter matematisk modell.

Innhold

1 Eksponentiell avslapning: $\dot{x} + \lambda x = \lambda f$

Den enkleste likningen i samlingen er

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) \qquad x(0) = x_0$$

med løsning $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$. Størrelsen $1/\lambda$ kalles **tidskonstanten**, og er tiden det tar før x er redusert med faktoren e. Halveringstiden er $\ln 2/\lambda$. Med en kilde f på høyresiden blir likningen

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = \lambda f(t),$$

og integrerende faktor $e^{\lambda t}$ gir

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s)\, ds.$$

Er f konstant, går x eksponentielt mot f. Tabellen viser fysiske systemer som alle er denne likningen.

System	Ukjent	λ
Radioaktiv nedbrytning, C-14	antall kjerner $N(t)$	desintegrasjonskonstanten
Trykk i en gassøyle	trykket $p(h)$	mg/Tk
Newtons avkjølingslov	temperaturen $T(t)$	α
RC-krets	spenningen $x(t)$ over kondensatoren	$1/RC$
RL-krets	strømmen $i(t)$	R/L
Ølboks med hull	vannstanden $h(t)$	tilpasses måledata
Lys i absorberende medium	intensiteten $I(z)$	$n\sigma$

Radioaktiv nedbrytning

Hver kjerne har samme sannsynlighet per tidsenhet for å desintegrere, så antall desintegrasjoner per tidsenhet er proporsjonalt med antall kjerner som er igjen: $\dot{N} = -\lambda N$. Karbondatering er en god inngang. C-14 har halveringstid på omtrent 5700 år, og forholdet mellom C-14 og C-12 i en død organisme gir alderen.

Trykket i en gassøyle

Her er den uavhengige variabelen høyden h og ikke tiden. Trykkforskjellen mellom h og $h+dh$ skyldes vekten av gassen mellom de to høydene:

$$p(h) - p(h+dh) = \frac{mgN}{V}\, dh$$

der N er antall molekyler i volumet V mellom h og $h+dh$ og m er massen til ett molekyl. Den ideelle gasslov $pV = NTk$ gir $N/V = p/Tk$, og med konstant temperatur får vi

$$p'(h) = -\frac{mg}{Tk}\, p(h).$$

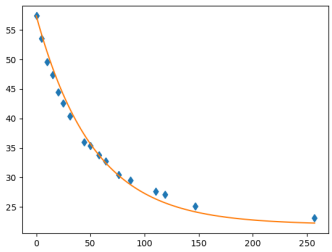
Løsningen $p(h) = p_0 e^{-mgh/Tk}$ kalles den barometriske høydeformelen. Lengden Tk/mg er omtrent åtte kilometer for luft.

Newtons avkjølingslov

En gjenstand med temperatur $T(t)$ står i omgivelser med konstant temperatur T_K. Antar vi at varmestrømmen er proporsjonal med temperaturforskjellen, får vi

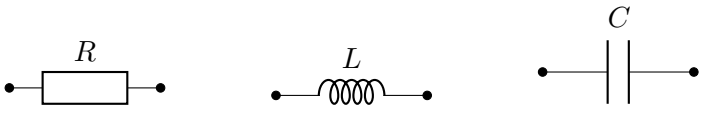
$$\dot{T}(t) = -\alpha\,(T(t) - T_K)\,.$$

Dette er likningen over med $x = T$, $\lambda = \alpha$ og $f = T_K$. Oppgavene bruker en elgtunge som tas ut av og settes inn i kjøleskapet. Figuren viser datasettet i oppgave 1.5, målte temperaturer i et kar med vann som står til avkjøling, sammen med løsningen av likningen for én verdi av α. Den beste verdien kan estimeres med minste kvadraters metode, se kapittel 5.



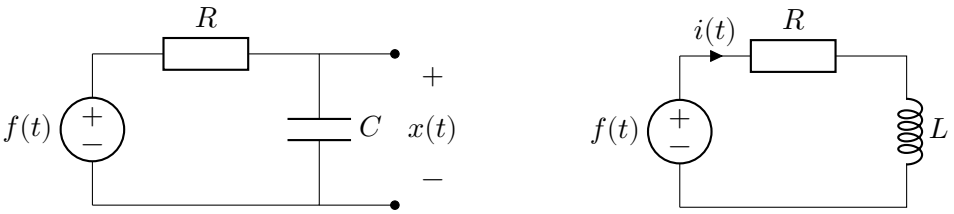
RC- og RL-kretsen

En elektrisk krets er satt sammen av elementer der det er en fast sammenheng mellom strømmen $i(t)$ gjennom elementet og spenningen $v(t)$ over det. De tre lineære elementene er motstanden, spolen og kondensatoren:



motstand	spole	kondensator
$v = Ri$	$v = L\dot{i}$	$i = C\dot{v}$

Kirchhoffs spenningslov sier at spenningene rundt en lukket sløyfe summerer til null. En motstand og en kondensator i serie med en spenningskilde $f(t)$ kalles en RC-krets, og med en spole i stedet for kondensatoren får vi en RL-krets:



I RC-kretsen går samme strøm $i = C\dot{x}$ gjennom motstanden og kondensatoren, der x er spenningen over kondensatoren. Kirchhoffs spenningslov gir $f = Ri + x$, altså

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{RC}x(t) = \frac{1}{RC}f(t).$$

I RL-kretsen gir samme lov $f = Ri + L\dot{i}$, altså

$$\dot{i}(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{1}{L}f(t).$$

Er kilden et nivolts batteri som kobles til ved $t = 0$, lades kondensatoren i RC-kretsen opp mot ni volt med tidskonstanten RC. RC-kretsen kalles et **lavpassfilter** når spenningen over kondensatoren brukes som utsignal: sender vi inn $f(t) = e^{i\omega t}$, der i nå er den imaginære enheten, blir den stasjonære løsningen $H(i\omega)e^{i\omega t}$ med

$$H(i\omega) = \frac{\lambda}{\lambda + i\omega} \qquad \lambda = \frac{1}{RC},$$

så høye frekvenser dempes mer enn lave.

Periodisk påtrykk: gjæringsdunken

Professor Lie skal gjære pilsnerøl ved ti grader, men har bare null grader på verandaen og tjue grader i stuen. Han flytter derfor gjæringsdunken ut og inn med fast periode T. Med Newtons avkjølingslov er temperaturen $x(t)$ i dunken gitt ved

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = \alpha f(t),$$

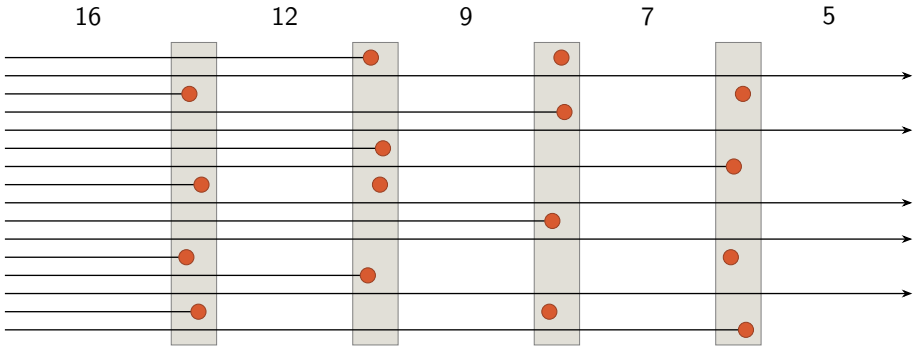
der omgivelsestemperaturen f er en firkantbølge som veksler mellom 20 og 0. Dunken er et lavpassfilter som glatter ut firkantbølgen, og temperaturen svinger rundt ti grader. Timeren som varsler når dunken skal flyttes, piper med en stygg firkantbølgelyd. Sendes spenningen fra timeren gjennom RC-kretsen over, er det nøyaktig samme likning som demper overtonene i pipelyden. Parallellen mellom de to er poenget med eksempelet, og den tas opp igjen med fourierrekker i kapittel 6.

Lys gjennom et absorberende medium

En stråle med tverrsnittsareal A og intensitet I går gjennom et medium med n partikler per volumenhet. Hver partikkel skygger for et areal σ, ekstinksjonstverrsnittet. Et sjikt med tykkelse dz inneholder $nA\,dz$ partikler som til sammen dekker arealet $\sigma nA\,dz$, så andelen av strålen som fjernes er $n\sigma\,dz$. Dermed er

$$I'(z) = -n\sigma I(z) \qquad I(z) = I_0 e^{-n\sigma z},$$

som er Beer–Lamberts lov. Figuren viser fire like sjikt som hvert fjerner omtrent en firedel av strålene som når fram.



Oppgaver

1.1 Tritium[1] har halveringstid på 12 år og 3 måneder. Finn desintegrasjonskonstanten.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_hydrogen

1.2 Anta at likningen for trykket i en gassøyle også er en modell for trykket i atmosfæren, finn trykket som funksjon av høyden over havet, og sammenlikne med den faktiske kurven. (Søk på nett.)

1.3 En elgtunge med temperatur 6°C settes på kjøkkenbenken. Etter to timer er temperaturen steget til 13°C, og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Finn α og lag et plot av temperaturen.

1.4 Da temperaturen var 15°C, ble elgtungen satt inn igjen i kjøleskapet. En time senere var temperaturen i tungen sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

1.5 Her er noen målte temperaturer i et kar med vann
np.array([57.4,53.6,49.6,47.4,44.5,42.6,40.4,36.0,35.4,33.8,32.8,30.5,29.5,27.6,27.1,25.1,23.1])
målt på tidspunktene (i minutter etter start)
np.array([0,5,10,15,20,25,31,44,50,58,64,76,87,110,119,147,257])
Estimer α i Newtons avkjølingslov $\dot{T} = \alpha\,(22 - T)$ ved minste kvadraters metode.

1.6 Regn ut temperaturen i Professor Lies gjæringsdunk dersom han setter tanken ut og inn med perioden T. Du kan anta $x(0) = 20$.

1.7 Løs Newtons avkjølingsproblem

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \qquad\qquad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers eksplisitte metode og med trapesmetoden og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?

2 Separable likninger: fallskjerm, Torricelli og reaksjonshastighet

Når endringsraten avhenger ikkelineært av tilstanden, men ikke av tiden, er likningen

$$\dot{x}(t) = g(x(t))$$

separabel. Her er tre fysiske eksempler der løsningen kan skrives opp, og der den oppfører seg kvalitativt annerledes enn eksponentialfunksjonen i forrige kapittel.

Fallskjermlikningen

En fallskjermhopper med masse m påvirkes av tyngden mg og en luftmotstand som er kvadratisk i farten: $m\dot{v} = mg - kv^2$. Måler vi farten i enheter av terminalfarten $\sqrt{mg/k}$ og tiden i enheter av $\sqrt{m/gk}$, står det

$$\dot{v} = 1 - v^2.$$

Løsningen med $v(0) = 0$ er $v(t) = \tanh t$. Likevektsløsningen $v = 1$ er stabil og $v = -1$ er ustabil, og eksempelet er en grei inngang til likevektspunkter og stabilitet uten at man trenger systemer. Likningen egner seg også som testproblem for numeriske løsere.

Torricellis lov

En boks med tverrsnittsareal B tømmes gjennom et hull med areal A i bunnen. Antar vi at den kinetiske energien til vannet som går ut er hentet fra den potensielle energien i det øverste laget, er $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, altså $v = \sqrt{2gh}$. Volumregnskapet gir

$$Bh'(t) = -A\sqrt{2gh(t)} \qquad h(0) = h_0.$$

Deler vi på $2B\sqrt{h}$ står det $\frac{d}{dt}\sqrt{h} = -\frac{A}{B}\sqrt{g/2}$, så

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \qquad T = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Boksen er tom etter endelig tid T, i motsetning til modellen $h' = -\lambda h$ fra forrige kapittel, som aldri blir helt tom. Forsøket er lett å gjøre i en forelesning: stikk hull i bunnen på en tom ølboks, skjær ut en loddrett stripe i siden og teip over, slik at vannstanden synes, og la studentene filme mens boksen tømmes. Da jeg gjorde det, var det den eksponentielle modellen som traff best. Torricelli gjør noen antagelser som sjelden stemmer, og det er et nyttig eksempel på at den fysisk begrunnede modellen ikke nødvendigvis vinner. Oppgave 2.3–2.5 har et tilsvarende datasett fra en badestamp.

Reaksjonshastighet

For en reaksjon $\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ er sannsynligheten for at to molekyler møtes proporsjonal med produktet av konsentrasjonene. For $2\mathrm{NO}_2 \to 2\mathrm{NO} + \mathrm{O}_2$ gir dette

$$\frac{d[\mathrm{NO}_2]}{dt} = -k[\mathrm{NO}_2]^2,$$

med løsning $1/[\mathrm{NO}_2] = 1/[\mathrm{NO}_2]_0 + kt$. Konsentrasjonen avtar som $1/t$ og ikke eksponentielt, og halveringstiden avhenger av startkonsentrasjonen. Den logistiske modellen $\dot{x} = a\,(x - x^2/k)$ for en populasjon kan leses på samme måte: det kvadratiske leddet er raten for møter mellom to individer av samme art.

Oppgaver

2.1 Fallskjermlikningen

$$\dot{v} = 1 - v^2$$

er en separabel likning som modellerer farten til en fallskjermhopper. Løs likningen med forskjellige initialkrav, plott løsningene oppå hverandre, og forklar hva som skjer.

2.2 Det ryktes på internett at $k = 0.54$ liter per mol per sek for reaksjonen $2\mathrm{NO}_2 \to 2\mathrm{NO} + \mathrm{O}_2$ ved 300 grader celsius. Løs likningen

$$\frac{d[\mathrm{NO}_2]}{dt} = -k[\mathrm{NO}_2]^2.$$

2.3 Jeg var på en hytte en gang og badet i en sirkulær badestamp med et sirkulært høl i bånn. Når jeg skulle tømme den, målte jeg vannstanden etterhvert som stampen tømtes, og fikk tabellen under. Hvis man ikke visste bedre eller hadde tatt kyb intro eller noe sånt, ville man kanskje ansett det som plausibelt å anta at endringsraten til vannstanden er proporsjonal med vannstanden:

$$\dot{h} = ah.$$

Finn h og estimér a og integrasjonskonstanten C.

t (s)	0	10	20	30	40	50
h (cm)	48	38	28	20	14	8

2.4 Ifølge fysikkboken er det Torricellis lov som gjelder:

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \qquad T = \frac{V_0}{A}\sqrt{\frac{2}{gh_0}}$$

der g er tyngdeakselerasjonen, V_0 er vannvolumet ved t_0 og A er arealet til tappehullet.[2] Radien til stampen var om lag en meter, men jeg glemte å måle radien på tappehullet. Hva var den?

2.5 Torricellis lov sier at h skal være en parabel. Kjør vanlig andreordens polynomregresjon på datasettet og sammenlikne med forrige oppgave.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law`

3 Den harmoniske oscillatoren: $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$

Andreordens lineære likninger med konstante koeffisienter er den modellen som går igjen flest steder. Uten demping og påtrykk er løsningen

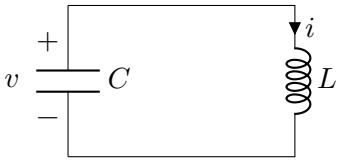
$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Tabellen viser hvordan parametrene skal leses i de forskjellige systemene.

System	Ukjent	m	d	k
Kloss og fjær, støtdemper	posisjonen x	masse	dempekonstant	fjærstivhet
RCL-krets i serie	spenningen over kondensatoren	L	R	$1/C$
Pendel, små utslag	vinkelen θ	ml^2		mgl
Stang på torsjonsfjær	vinkelen θ	ml^2		$k - mgl$
Skip som ruller	krengevinkelen φ	I		ΔGM

Kloss og fjær og LC-kretsen

Newtons andre lov for en kloss med masse m på en fjær med stivhet k er $m\ddot{x} = -kx$. En spole og en kondensator i sløyfe er det samme systemet:



Spolen har spenningen v over seg, så $L\dot{i} = v$, og strømmen tappes fra kondensatoren, så $C\dot{v} = -i$. Deriverer vi den første likningen og setter inn den andre, står det $L\ddot{i} + \frac{1}{C}i = 0$, med løsning

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\, t\right).$$

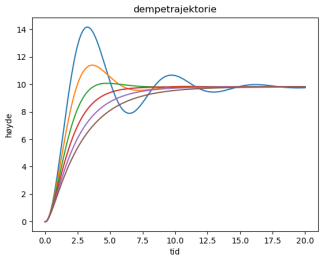
Lader vi opp kondensatoren med et batteri og kobler den til spolen, svinger strømmen med vinkelfrekvensen $1/\sqrt{LC}$, slik klossen svinger med $\sqrt{k/m}$.

Støtdemperen og RCL-kretsen

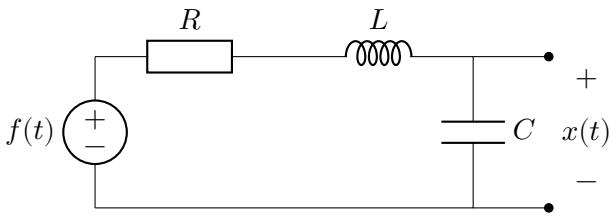
Støtdemperen på en bil er et godt fysisk bilde for den inhomogene likningen: en masse m på fjær og demper, med tyngden som konstant påtrykk,

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = mg.$$

Likevektsløsningen $x = mg/k$ er den konstante partikulærløsningen, og initialkravene $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ svarer til at bilen jekkes opp til fjæren er ubelastet og så slippes. Figuren viser løsningen for seks forskjellige dempekonstanter.



Hele analysen kan gjenbrukes på en motstand, en spole og en kondensator i serie med en spenningskilde $f(t)$:



Med x lik spenningen over kondensatoren er strømmen $i = C\dot{x}$, og Kirchhoffs spenningslov $f = Ri + L\dot{i} + x$ gir

$$L\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + \frac{1}{C}x(t) = \frac{1}{C}f(t).$$

Induktansen spiller rollen til massen, motstanden til dempingen og den inverse kapasitansen til stivheten.

Pendelen og linearisering

En pendel med lengde l uten friksjon tilfredsstiller

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

For små utslag er $\sin\theta \approx \theta$, og vi får den lineariserte pendellikningen $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ med periode $2\pi\sqrt{l/g}$. Pendelen er standardeksempelet på linearisering, og en lang pendel i nærheten, som foucaultpendelen i Realfagbygget, gir en oppgave der svaret kan kontrolleres.

Fortegnet på stivheten: stangen og skipet

Fester vi en loddrett, masseløs stang med lengde l til gulvet med en torsjonsfjær med stivhet k og setter en punktmasse m på toppen, gir Newtons andre lov

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - k\theta,$$

og for små utslag

$$ml^2\ddot{\theta} + (k - mgl)\,\theta = 0.$$

Stangen svinger om loddlinjen når $k > mgl$ og velter når $k < mgl$. Et skip er en slik stang. Tyngden angriper i tyngdepunktet G og oppdriften i tyngdepunktet til den neddykkede delen av skroget, som flytter seg mot den siden som går ned. Det rettende momentet er $\Delta\, GZ(\varphi)$, der $\Delta = mg$ er vekten og GZ er den rettende armen, og

$$I\ddot{\varphi} + \Delta\, GZ(\varphi) = 0.$$

For små vinkler er $GZ \approx GM\sin\varphi$ der GM er metasenterhøyden, så skipet ruller som en pendel med lengde $I/(m\,GM)$ og kantrer dersom G ligger over M. Ganger vi likningen med $\dot{\varphi}$ og integrerer, får vi

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \Delta\int_0^{\varphi} GZ(\psi)\,d\psi = c.$$

Den potensielle energien er altså vekten av skipet ganger arealet under GZ-kurven, og det er grunnen til at stabilitetskravene fra IMO er krav til dette arealet.

Frekvensrespons og resonans

Med påtrykket $f(t) = e^{i\omega t}$ er partikulærløsningen $x_p(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}$ der

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}.$$

Nullpunktene til nevneren er systemets poler. Uten demping ligger polene i $\pm i\omega_0$, og påtrykk med frekvensen ω_0 gir en løsning som vokser som $t \sin \omega_0 t$. Tilbakekobling i en elgitar og en ferge som vagges i takt med egenfrekvensen, er eksempler studentene kjenner. I s-domenet blir elementlovene $V = RI$, $V = sLI$ og $V = I/sC$, og kretser kan regnes som om de bare besto av motstander. For RCL-kretsen over gir dette

$$X(s) = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC}\, F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}\, F(s).$$

Oppgaver

3.1 Den lineariserte pendellikningen gir oss faktisk en modell som er grei nok, om vinkelutslaget er lite. I realfagsbygget finner du Norges lengste foucaultpendel.[3] Finn ut hvor lang den er.
(Hint: Mål perioden så nøyaktig du kan, og sammenlikne med den lineariserte pendellikningens analytiske løsning. Institutt for fysikk har visst målt tyngdeakselerasjonen i kjelleren på realfagsbygget temmelig nøyaktig til 9.8214675 meter per sekund per sekund.)

3.2 For noen frekvenser kan systemet gå til helvete. Dette kalles **resonans**, og hvis du var en sånn rampegutt som spilte elgitar i rockeband eller likte å løpe frem og tilbake på fergedekket for å få fergen til å vagge bortover fjorden vet du hva det går i.[4] Løs

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \cos \omega t.$$

3.3 Utled regnereglene

$$V = RI \qquad \text{og} \qquad V = \frac{I}{sC} \qquad \text{og} \qquad V = sLI$$

for motstand, spole og kondensator ved å laplacetransformere regnereglene deres.

3.4 Vis at strømmen i RCL-kretsen i serie tilfredsstiller

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(v)\ \mathrm{d}v = f(t)$$

og få likningen over i s-domenet ved å laplacetransformere den, og finn systemfunksjonen.

3.5 La oss avslutte med litt skråttkast. La oss si at du kaster en ball fra origo med startfarten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[3] https://www.ntnu.no/fysikk/foucault
[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Resonance`

og at ballen kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Dersom luftmotstanden antas å avhenge lineært med farten (dette er greit dersom farten er lav), blir systemet

$$m\ddot{x}_1 = -a\dot{x}_1$$
$$m\ddot{x}_2 = -a\dot{x}_2 - mg$$

der m er massen til ballen, a er proporsjonalitetskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen. Løs med laplace og plott ballens trajektorie. Løs også systemet

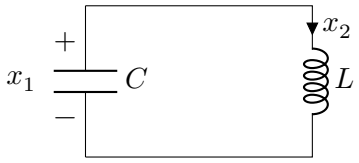
$$m\ddot{x}_1(t) = \delta(t) - a\dot{x}_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2(t) = \delta(t) - a\dot{x}_2(t) - mg$$

4 Systemer og bevarte størrelser: $\dot{x} = f(x)$

Skriver vi en andreordens likning som et system av to førsteordens likninger, blir løsningen en kurve i planet, og spørsmålet blir hvilke kurver løsningene følger. For flere fysiske systemer finnes det en funksjon E som er konstant langs løsningene, slik at løsningskurvene er nivåkurver for E. I fysikken heter denne funksjonen energi. Eksemplene kan brukes både for systemer av differensiallikninger, for nivåkurver og gradienter, og som testproblemer for numeriske metoder.

LC-kretsen

La x_1 være spenningen over kondensatoren og x_2 strømmen gjennom spolen, med retninger som i figuren.



Elementlovene gir

$$C\dot{x}_1 = -x_2 \qquad L\dot{x}_2 = x_1,$$

og energien

$$E = \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2$$

er konstant, siden $\dot{E} = Cx_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 = 0$. Løsningene går rundt på ellipser. Kondensatoren driver strøm gjennom spolen, spolen lader kondensatoren opp igjen med motsatt fortegn, og energien skvulper frem og tilbake mellom dem. I de skalerte variablene $\sqrt{C}\,x_1$ og $\sqrt{L}\,x_2$ er ellipsene sirkler, og løsningen er en rotasjon med vinkelhastighet $1/\sqrt{LC}$. Kretsen er derfor også en inngang til rotasjonsmatriser og matriseeksponentialen.

Pendelen og kloss og fjær

Ganger vi pendellikningen med $ml^2\dot{\theta}$ og integrerer, får vi

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = c,$$

som er summen av kinetisk og potensiell energi. Energibevaring følger altså av Newtons andre lov, og trenger ikke postuleres. For kloss og fjær gir samme regning $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$. Med q for posisjon og p for bevegelsesmengde er begge systemene på formen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

der **hamiltonfunksjonen** H er totalenergien, altså summen av kinetisk og potensiell energi. Differansen mellom kinetisk og potensiell energi kalles **lagrangefunksjonen**. For pendelen kan vi ta $q = \theta$ og $p = \dot{\theta}$, og da er $H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{g}{l}\cos q$ energien delt på ml^2. Legger vi til luftmotstand som er lineær i farten,

$$\dot{q} = p \qquad \dot{p} = -\frac{g}{l}\sin q - ap,$$

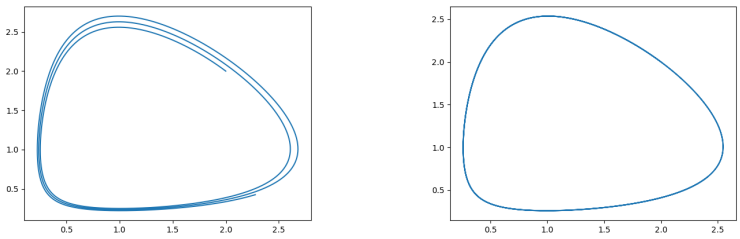
blir $\dot{H} = -ap^2$, og løsningene spiraler inn mot likevektspunktet.

Lotka–Volterra

Snøskohare og kanadisk gaupe er standardeksempelet på et system som ikke er mekanisk, men som likevel har en bevart størrelse. Med alle parametre lik 1 er systemet

$$\dot{x} = x - xy \qquad \dot{y} = -y + xy,$$

og funksjonen $x + y - \ln|x| - \ln|y|$ er konstant langs løsningene. Dette førsteintegralet har ingen opplagt tolkning, og det er poenget med å ta det før pendelen.



Figurene viser hvorfor bevarte størrelser er nyttige for numerikk. Til venstre er systemet løst med Eulers eksplisitte metode,

$$x_{n+1} = x_n + hx_n\,(1 - y_n) \qquad y_{n+1} = y_n + hy_n\,(x_n - 1)\,,$$

og løsningen spiraler utover på tvers av nivåkurvene. Til høyre er x_n byttet ut med x_{n+1} i den andre likningen,

$$x_{n+1} = x_n + hx_n\,(1 - y_n) \qquad y_{n+1} = y_n + hy_n\,(x_{n+1} - 1)\,,$$

og løsningen holder seg på en lukket kurve. Denne varianten kalles **symplektisk Euler**. Det samme forsøket kan gjøres med pendelen, der størrelsen man overvåker er totalenergien.

Tolegemeproblemet

Newtons andre lov kombinert med gravitasjonsloven gir for en planet rundt en stjerne med masse m i origo

$$\ddot{x} = -Gm\frac{x}{|x|^3}.$$

Energien $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - Gm/|x|$ og dreieimpulsen $x \times \dot{x}$ er bevart, og banene er kjeglesnitt. Systemet er en fin numerisk øvelse: først med stjernen i ro, så med to legemer som begge beveger seg, og så med flere planeter.

Stivt legeme

Vinkelhastighetene ω_k om hovedaksene til et stivt legeme som roterer fritt, tilfredsstiller eulerlikningene

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \qquad I_2\dot{\omega}_2 = (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \qquad I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$$

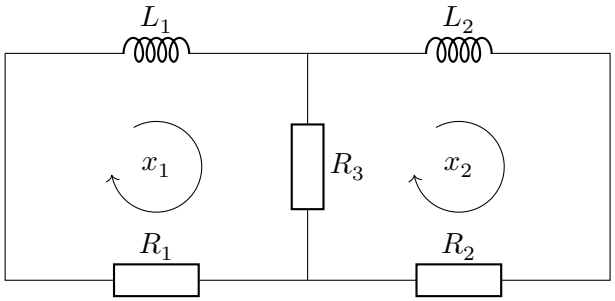
der I_k er treghetsmomentene. Dette er et ikkelineært system med tre ukjente og to bevarte størrelser, den kinetiske energien $\frac{1}{2}\sum_k I_k\omega_k^2$ og kvadratet av dreieimpulsen $\sum_k I_k^2\omega_k^2$, så løsningene ligger på skjæringskurven mellom to ellipsoider.

To legemer som utveksler varme

En varm klump senkes i et vannbad som står ute i null grader. Med Newtons avkjølingslov for varmeutvekslingen mellom klump og vann og mellom vann og luft får vi

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 (x_2 - x_1) \qquad \dot{x}_2 = \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)$$

der x_1 er temperaturen i klumpen, x_2 er temperaturen i vannet, og α_1 og α_2 er varmeoverførings-koeffisientene mellom klump og vann og mellom vann og luft. Her er det antatt at klumpen og vannet har samme varmekapasitet. Dette er et lineært system $\dot{x} = Ax$, og en fysisk motivasjon for egenverdier og egenvektorer. En krets med to sløyfer, to spoler og tre motstander gir et system på samme form:



Med sløyfestrømmene x_1 og x_2 som ukjente gir Kirchhoffs spenningslov på hver sløyfe

$$L_1 \dot{x}_1 = -(R_1 + R_3) x_1 + R_3 x_2 \qquad L_2 \dot{x}_2 = R_3 x_1 - (R_2 + R_3) x_2.$$

Med $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ i det første systemet, og $L_1 = L_2 = 1$, $R_2 = R_3 = 1$ og $R_1 = 0$ i det andre, er de to systemene identiske:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \qquad \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2.$$

Oppgaver

4.1 I LC-kretsen, la $x(t)$ være spenningen over kondensatoren og $i(t)$ strømmen gjennom spolen. Finn et system av to førsteordens differensiallikninger for x og $\dot{x}$.

4.2 Løsningene til LC-kretsen ligger på kurvene der energien E er konstant. Hva slags kurver er dette? Tegn noen av dem i (x_1, x_2)-planet, og tegn på retningen løsningene reiser i.

4.3 Kloss- og fjærlikningen er $\ddot{x} + x = 0$. Vis at

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$$

er konstant på en løsningstrajektorie.

4.4 Pendellikningen er

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0.$$

Vis at totalenergien er konstant på en løsningstrajektorie.

4.5 Finn lagrangefunksjonen til kloss og fjær $m\ddot{x} = -kx$.

4.6 Skriv pendellikningen som et system med $q = \theta$ og $p = \dot{\theta}$, og løs det numerisk med både Eulers eksplisitte metode og **symplektisk Euler**. Akkurat som for lotkavolterra, kan du evaluere den totale energien i hvert tidssteg.

4.7 Finn totalenergien til pendel og kloss.

4.8 En homeopatisk klump skal varmes opp til 88 grader celsius,[5] og så senkes i vann fra springen, som holder 4 grader. Bruk modellen for to legemer som utveksler varme, med $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Når får vannet en passelig drikketemperatur på 13 grader?

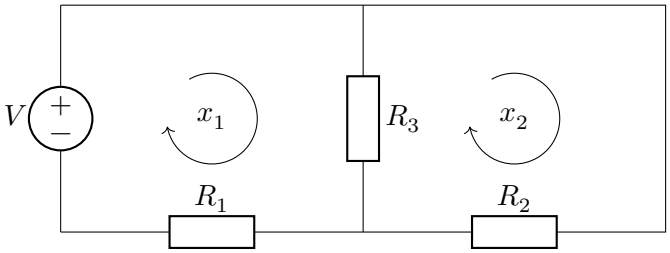
[5] Homeopatiens grunnlegger Samuel Hahnemann ble nemlig 88 år gammel: `https://en.wikipedia.org/wiki/Samuel_Hahnemann`

5 Lineære likningssystemer og regresjon

De fysiske eksemplene i lineær algebra er færre, men de er konkrete.

Resistive kretser

Kirchhoffs strømlov sier at strømmene inn i et forgreiningspunkt summerer til null, og Kirchhoffs spenningslov at spenningene rundt en lukket sløyfe summerer til null. For en krets med bare motstander og kilder gir dette et lineært system $Ax = b$ for strømmene.



Med maskestrømsmetoden innfører man én ukjent strøm per sløyfe, her x_1 og x_2. Strømmen gjennom R_1 og R_2 er da x_1 og x_2, mens strømmen gjennom den felles motstanden R_3 er $x_1 - x_2$. Summerer vi spenningene rundt hver sløyfe, får vi

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Metoden gir like mange ukjente som sløyfer. Kretser med mange sløyfer er et naturlig første eksempel på et system som er satt opp fra en fysisk regel, og som det lønner seg å løse med python.

Balansering av reaksjonslikninger

Å balansere

$$x_1\mathrm{NO} + x_2\mathrm{O}_2 \to x_3\mathrm{NO}_2$$

er å finne nullrommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

der radene er regnskapet for nitrogen og oksygen. Dette er kjemi og ikke fysikk, men det er et takknemlig eksempel på et homogent system, og det gir en naturlig tolkning av lineær avhengighet og frie variable.

Regresjon

Historien om Gauss og asteroiden Ceres er den klassiske inngangen til minste kvadraters metode. De fysiske datasettene i dette kompendiet er temperaturmålingene i oppgave 1.5 og vannstanden i oppgave 2.3. Newtons avkjølingslov gir

$$\ln\left(T(t) - T_K\right) = \ln\left(T_0 - T_K\right) - \alpha t,$$

som er lineær i t, så α kan estimeres med lineær regresjon. Det samme trikset brukes på hastighetsloven $r = k[\mathrm{A}]^m[\mathrm{B}]^n$ for en kjemisk reaksjon: tar man logaritmen, blir målingene et lineært system for m, n og $\log k$. Torricellis lov sier at vannstanden er et andregradspolynom i t, så der passer polynomregresjon.

Oppgaver

5.1 Balanser reaksjonen

$$a\mathrm{C_6H_{14}O_4} + b\mathrm{O_2} \to c\mathrm{CO_2} + d\mathrm{H_2O}.$$

5.2 Vi kan kjøre på systemer av reaksjonslikninger og. Her en prosess for å lage metanol.

$$a\mathrm{CO} + b\mathrm{H_2} \to c\mathrm{CH_3OH}$$
$$d\mathrm{CO_2} + e\mathrm{H_2} \to f\mathrm{CH_3OH} + g\mathrm{H_2O}$$

`https://en.wikipedia.org/wiki/Methanol#Production`

5.3 Kvikksølvklorid $\mathrm{HgCl_2}$ og oksalat $\mathrm{{C_2O_4}^{2-}}$ reagerer til noe andre greier:

$$2\mathrm{HgCl_2} + \mathrm{{C_2O_4}^{2-}} \to 2\mathrm{Cl^-} + 2\mathrm{CO_2} + \mathrm{Hg_2Cl_2}$$

Reaksjonsraten er $k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{{C_2O_4}^{2-}}\right]^n$, der reaksjonshastigheten k og **reaksjonsordnene** m og n må bestemmes empirisk. Her er tre målinger:

$[\mathrm{HgCl_2}]$	$\left[\mathrm{{C_2O_4}^{2-}}\right]$	$k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{{C_2O_4}^{2-}}\right]^n$
0.105	0.15	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.105	0.30	$7.1 \cdot 10^{-5}$
0.052	0.30	$3.5 \cdot 10^{-5}$

Ta log til alt og utled følgende lineære likningssystem for m, n og $\log k$:

$$\log k + m\log 0.105 + n\log 0.15 = \log\left(1.8 \cdot 10^{-5}\right)$$
$$\log k + m\log 0.105 + n\log 0.30 = \log\left(7.1 \cdot 10^{-5}\right)$$
$$\log k + m\log 0.052 + n\log 0.30 = \log\left(3.5 \cdot 10^{-5}\right)$$

Det er ikke så gøy å gausse så stygge tall for hånd, så nå kan du finne ut av np.linalg.solve.

6 Periodiske påtrykk, fourierrekker og konvolusjon

For en lineær likning med konstante koeffisienter er $e^{i\omega t}$ en egenfunksjon: påtrykket $e^{i\omega t}$ gir responsen $H(i\omega)e^{i\omega t}$. Skriver vi et periodisk påtrykk som en fourierrekke, er responsen derfor

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in\omega) e^{in\omega t}.$$

Tallet $|c_n|$ er amplituden til overtone nummer n, og $|H|$ er amplituderesponsen.

Lyd

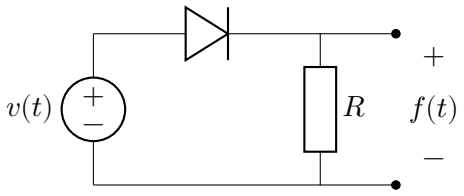
En tone på 442 Hz er en periodisk trykkbølge, og bølgeformen bestemmer klangen. Et godt første steg er å vise bølgeformene til forskjellige instrumenter og la studentene finne grunnperioden. En firkantbølge låter omtrent som en klarinett. Firkantbølgen som er 1 for $0 < t < \pi$ og 0 for $-\pi < t < 0$, har fourierrekken

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots\right),$$

med bare odde overtoner. Sender vi den gjennom lavpassfilteret fra kapittel 1, ganges overtone n med $\lambda/\sqrt{\lambda^2 + n^2\omega^2}$, der ω er grunnfrekvensen, og lyden blir mykere. Dette er pipelyden fra timeren til Professor Lie. Temperaturen i gjæringsdunken er samme regnestykke: omgivelsestemperaturen er tjue ganger en firkantbølge, konstantleddet gir gjennomsnittet på ti grader, og overtonene gir svingningene rundt det. Intervaller er forhold mellom frekvenser: en oktav er 2, en ren kvart $4/3$ og en ren ters $5/4$, så regning med intervaller er regning med logaritmer.

Likeretteren

En diode slipper strøm gjennom i bare én retning. Kobles den mellom en vekselspenningskilde $v(t)$ og en motstand, får vi en **halvbølgelikeretter**:



Med $v(t) = \sin 100\pi t$, som er nettfrekvensen på 50 Hz, og en ideell diode er spenningen f over motstanden lik v når v er positiv, og null ellers. Fourierrekken til dette signalet har konstantleddet $1/\pi$, og det er dette leddet et etterfølgende lavpassfilter slipper gjennom når vekselspenning gjøres om til likespenning. En virkelig diode følger Shockleys diodelov $i = i_0\left(e^{v/v_0} - 1\right)$, som er ikkelineær, så kretser med dioder er også en enkel kilde til likninger som ikke kan løses for hånd.

Impulsrespons

Diracpulsen modellerer et påtrykk som er ekstremt kraftig og ekstremt kortvarig, som et hammerslag. Responsen h på en diracpuls kalles impulsresponsen, og har laplacetransform H. For et vilkårlig påtrykk er responsen konvolusjonen

$$x(t) = \int_0^t h(t-s)f(s)\,ds.$$

For lavpassfilteret er $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, og formelen er den samme som i kapittel 1. Konvolusjon dukker opp to steder til: sannsynlighetstettheten til en sum av uavhengige variable er konvolusjonen av tetthetene, og løsningen av varmelikningen på hele linjen er startfordelingen konvolvert med en normalfordeling (kapittel 7). En punktladning er det romlige motstykket til hammerslaget: ladningstettheten er en diracpuls.

Oppgaver

6.1 **Firkantbølgen** er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Finn den reelle og den komplekse fourierrekken til firkantbølgen og plot partialsummer i python for å dobbeltsjekke at du har regna riktig.

6.2 **Trekantbølgen** er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Finn fourierrekken til trekantbølgen og plott på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$.
(Tips: Det kan være lurt å utnytte at f er en jevn funksjon.)

6.3 Pipelyden fra timeren til Professor Lie er en firkantbølge f, og han sender den gjennom lavpassfilteret

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{1}{RC}f$$

for å få en mykere lyd. Bruk laplacetransform til å finne frekvensresponsen og regn ut den mykere lyden $x(t)$.

6.4 En ren ters (intervallet fra g-strengen til h-strengen) er gitt ved multiplikasjonsfaktoren $5/4$ og en ren kvart (intervallet mellom de andre strengene) ved $4/3$. En oktav er å doble frekvensen. Det er disse pene multiplikasjonsfaktorene som gir velklingende interferensmønstre når du spiller på to strenger samtidig, og det er derfor disse multiplikasjonsfaktorene som er lettest å lytte seg frem til når du stemmer to strenger mot hverandre.
Men om du gjør det slik, kommer gitaren til å klinge helt forferdelig. Hvorfor?
(Om du ikke spiller et musikkinstrument kan du hoppe over denne oppgaven.)

6.5 Forklar hvorfor en punktladning (for eksempel et elektron) er et fysisk eksempel på en diracpuls. (Hint: Kombiner Gauss' lov på integralform med fluksen ut av et kuleskall rundt ladningen, se kapittel 10.)

7 Varmelikningen og diffusjon: $\dot{u} = \alpha \Delta u$

Varmelikningen kommer fra to ingredienser: en bevaringslov og en lov for fluksen.

Bevaringslover

La $\rho(x,t)$ være tettheten av noe som ikke kan oppstå eller forsvinne, og J fluksen. Mengden mellom x og $x+h$ endres bare ved at noe strømmer inn i den ene enden og ut i den andre:

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+h} \rho \, dx = J(x,t) - J(x+h,t).$$

Deler vi på h og lar $h \to 0$, får vi kontinuitetslikningen $\dot{\rho} + \partial_x J = 0$. Et rør som det strømmer noe gjennom, for eksempel et kloakkrør, er et bilde studentene husker. I flere dimensjoner gir divergensteoremet på samme måte

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0,$$

og likningen gjelder like godt for masse, ladning og varme.

Flukslover

Det som gjenstår er å si hva som driver fluksen. Tre vanlige flukslover har samme form:

Lov	Fluks	Drives av
Ficks lov	$J = -D\nabla\rho$	konsentrasjonsgradient
Fouriers lov	$q = -\kappa\nabla T$	temperaturgradient
Ohms lov	$j = -\sigma\nabla\phi$	gradienten til det elektriske potensialet

Ficks lov satt inn i kontinuitetslikningen gir diffusjonslikningen $\dot{\rho} = D\Delta\rho$. For varme er den bevarte størrelsen indre energi med tetthet $\rho c T$, der ρ er massetettheten og c varmekapasiteten, og Fouriers lov gir

$$\rho c \dot{T} = \kappa \Delta T,$$

altså varmelikningen med $\alpha = \kappa/\rho c$.

Stangen

For en stang på $[0,\pi]$ der endene holdes på null grader, er løsningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx) \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

der f er starttemperaturen. Hvert ledd er en eksponentiell avslapning som i kapittel 1, med tidskonstant $1/\alpha n^2$: fine detaljer i temperaturfordelingen forsvinner først. Er endene isolerte, blir randkravet at den deriverte er null, rekken blir en cosinusrekke, og temperaturen går mot gjennomsnittet av f. Randkravene har altså direkte fysiske tolkninger, og det er verdt å si høyt.

Hele linjen

Fouriertransformerer vi med hensyn på x, blir varmelikningen $\partial_t \hat{u} = -\alpha k^2 \hat{u}$, som igjen er kapittel 1, én likning for hver k. Transformerer vi tilbake, står det

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-\frac{(x-v)^2}{4\alpha t}}\, dv.$$

Varmelikningen filtrerer startfordelingen med en normalfordeling med varians $2\alpha t$. Dette er samme regning som for summen av uavhengige normalfordelte variable, så de to eksemplene kan godt tas etter hverandre.

Stasjonær varme

Når temperaturen ikke lenger endrer seg, står det $\Delta u = 0$, og løsningene kalles harmoniske funksjoner. I øvre halvplan med randtemperatur f er løsningen

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \frac{y}{(x-v)^2 + y^2}\, dv,$$

og samme likning dukker opp for det elektrostatiske potensialet i kapittel 10.

Oppgaver

7.1 Utled **diffusjonslikningen**[6]

$$\dot{\rho} = D\Delta\rho$$

ved å sette Ficks lov inn i kontinuitetslikningen.

7.2 Vis at for varmelikningen er funksjonene

$$u_n(x,t) = z_n(t)y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

alle løsninger. Hva må n være for at randkravene $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ skal være tilfredsstilt?

7.3 Skriv opp løsningen til varmeledningsproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha\Delta u(x,t) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = x\,(\pi - x)$$

og plott løsningen for noen utvalgte tidspunkt.

7.4 Forklar at dersom endepunktene på stangen er isolerte istedet for holdt ved temperaturen 0, må vi løse neumannproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha\Delta u(x,t) \qquad \nabla u(0,t) = \nabla u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

7.5 Fourieromvend varmelikningen med hensyn på x og vis at

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u} = -k^2\hat{u}$$

7.6 Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation

7.7 Utled det eksplisitte endeligdifferanseskjemaet

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

for varmelikningen.

8 Bølgelikningen: $\ddot{u} = c^2 \Delta u$

Bølgelikningen er Newtons andre lov for et kontinuerlig medium. Den kan utledes for fire forskjellige mekaniske og elektriske systemer, og en femte gang fra Maxwells likninger.

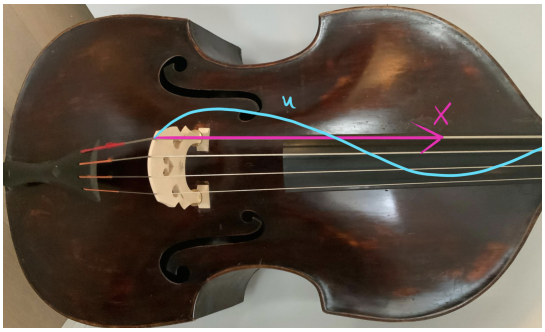
System	Ukjent u	c^2
Vibrerende streng	utslaget	strekk/masse per lengde
Transmisjonslinje	spenning eller strøm	$1/LC$
Trommeskinn	utslaget	strekk per lengde/masse per areal
Lyd i luft	overtrykket	$\gamma p_0/\rho_0$
Elektromagnetiske bølger	feltene E og B	$1/\mu_0\epsilon_0$

Strengen

En streng med massetetthet ρ per lengde er spent opp med strekket T. Den loddrette komponenten av strekket i et punkt er T ganger stigningstallet, så Newtons andre lov for biten mellom x og $x+h$ er

$$\rho h\, \ddot{u}(x,t) = T\Big(\partial_x u(x+h,t) - \partial_x u(x,t)\Big).$$

Deler vi på h og lar $h \to 0$, får vi $\ddot{u} = \frac{T}{\rho}\,\partial_x^2 u$.



Transmisjonslinjen

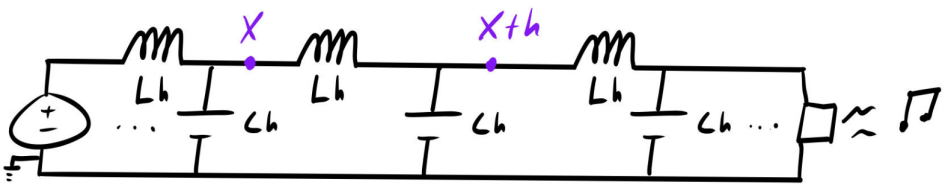
Et langt ledningspar har induktans L og kapasitans C per meter. Tenker vi oss små spoler og kondensatorer bortetter ledningsparet, gir elementlovene

$$v(x+h,t) = v(x,t) - Lh\,\partial_t i \qquad i(x+h,t) = i(x,t) - Ch\,\partial_t v.$$

I grensen $h \to 0$ er dette telegraflikningene $\partial_x v = -L\,\partial_t i$ og $\partial_x i = -C\,\partial_t v$. Deriverer vi den første med hensyn på x og den andre med hensyn på t, får vi

$$\partial_t^2 v = \frac{1}{LC}\,\partial_x^2 v.$$

Tas denne utledningen rett etter strengen, ser studentene at samme likning kommer fra helt annen fysikk.

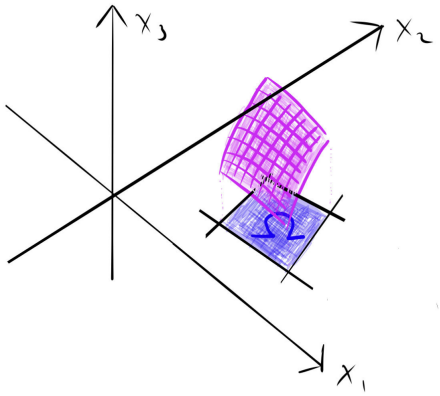


Trommeskinnet

For en membran med massetetthet ρ per areal og strekk T per lengde gir samme resonnement, nå med Greens teorem, at

$$\rho\,\ddot{u} = T\Delta u.$$

Ligger skinnet i ro under et trykk p, står det Poissons likning $\Delta u = p/T$. På et sirkulært skinn må laplaceoperatoren skrives i polarkoordinater, og den radielle delen av løsningen er besselfunksjoner. Overtonene til en tromme er derfor ikke heltallige multipler av grunnfrekvensen, slik de er for en streng.



Lyd

I en lydbølge skrives trykket og tettheten $p_0 + p$ og $\rho_0 + \rho$, der p_0 og ρ_0 er verdiene i stille luft og p og ρ er små avvik. Den ukjente er overtrykket p. Tre likninger trengs: kontinuitetslikningen $\dot\rho + \rho_0 \nabla \cdot v \approx 0$, Newtons andre lov $\rho_0 \dot v \approx -\nabla p$, og sammenhengen $p \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho$ mellom trykk og tetthet, som følger av at $p_0 + p$ er proporsjonal med $(\rho_0 + \rho)^\gamma$. Her er v farten til luften, og γ er $7/5$ for toatomige gasser. Tidsderiverer vi den første og setter inn de to andre, står det

$$\ddot p = c^2 \Delta p \qquad c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Med $p_0 = 10^5$ Pa og $\rho_0 = 1.2$ kg/m^3 gir dette omtrent 340 m/s. Alle tre tilnærmingene bygger på at overtrykket i en vanlig lyd er mange størrelsesordener mindre enn atmosfæretrykket, og det gjør utledningen til et godt eksempel på linearisering.

Løsninger

På $[0, \pi]$ med festede ender er løsningene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)\right) \sin(nx).$$

Sammenliknet med stangen i kapittel 7 er romdelen den samme, mens tidsdelen svinger i stedet for å dø ut. På hele linjen er løsningen d'Alemberts formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,$$

der f er startutslaget og g startfarten: en profil som deler seg i to og flytter seg med farten c i hver retning. I rommet er de plane bølgene $e^{i(k\cdot x-\omega t)}$ løsninger når $\omega^2 = c^2|k|^2$. Denne sammenhengen mellom frekvens og bølgetall kalles dispersjonsrelasjonen, og kommer igjen i neste kapittel.

Oppgaver

8.1 Sett opp Newtons andre lov for den lille biten av strengen fra x til $x+h$ og utled **bølgelikningen**[7]

$$\ddot{u}(x,t) = c^2\Delta u(x,t)$$

der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Denne har benevning meter per sekund og kalles bølgefarten.

8.2 La L være ledningens induktans per meter, og C ledningens kapasitans per meter. Se på en liten bit av ledningsparet og vis at

$$v(x+h,t) = v(x,t) - Lh\partial_t i(x,t)$$

og at

$$i(x+h,t) = i(x,t) - Ch\partial_t v(x,t)$$

og bruk disse til å utlede telegraflikningene

$$\partial_x v = -L\partial_t i \qquad\qquad \partial_x i = -C\partial_t v$$

og bruk disse til å vise at

$$\ddot{v} = c^2\Delta v \qquad \text{og at} \qquad \ddot{i} = c^2\Delta i$$

der $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ er bølgefarten.

8.3 Vis at det for bølgelikningen finnes massevis av **overtoner**[8]

$$u_n(x,t) = (a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt))\sin(nx).$$

8.4 Utled bølgelikningen

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn.
(Hint: Se på en liten bit Ω av membranen, finn kraften på Ω langs $\partial\Omega$, bruk det samme kongruenstrikset som for strengen, og avslutt med Greens teorem.)

8.5 Utled Poissons likning

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

for et trommeskinn i ro med horisontalt strekk T og trykk p.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Overtone

8.6 I en lydbølge er trykket $p_0 + p$ og tettheten $\rho_0 + \rho$, der p_0 og ρ_0 er verdiene i stille luft. Anta at

$$p_0 + p = K(\rho_0 + \rho)^\gamma$$

for en konstant K. Utled at

$$1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

og bruk at overtrykket p i en vanlig lyd er mange størrelsesordener mindre enn atmosfæretrykket p_0 til å se at

$$p \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho.$$

8.7 Sett tettheten $\rho_0 + \rho$ og fluksen $(\rho_0 + \rho)v$, der v er farten til luften, inn i kontinuitetslikningen og utled at

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot v \approx 0.$$

8.8 Bruk Maxwells likninger i tomt rom til å utlede bølgelikningene $\ddot{E} = c^2 \Delta E$ og $\ddot{B} = c^2 \Delta B$.

8.9 Vis at dersom bølgefunksjonene $E(x,t) = E_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)}$ og $B(x,t) = B_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene E_0, B_0 og k være innbyrdes ortogonale.

8.10 Utled d'Alemberts løsning

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt.$$

av bølgelikningen på $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

8.11 Sett den plane bølgen $u(x,t) = e^{i(k\cdot x - \omega t)}$ inn i bølgelikningen $\ddot{u} = c^2 \Delta u$ og vis at den er en løsning når

$$\omega^2 = c^2 |k|^2.$$

Dette kalles bølgelikningens **dispersjonsrelasjon**.[9]

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_relation

9 Schrödingerlikningen og egenverdiproblemer

Kvantefysikken er anvendelsen av komplekse indreproduktrom, og et tredje eksempel på separasjon av variable etter stangen og strengen. En partikkel med masse m i et potensial V beskrives av en kompleks bølgefunksjon $\Psi(x,t)$ som tilfredsstiller

$$i\hbar\,\dot{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + V\Psi,$$

og $|\Psi(x,t)|^2$ tolkes som sannsynlighetstettheten for posisjonen.

Separasjon av variable

Setter vi inn $\Psi(x,t) = f(t)\psi(x)$, får vi $f(t) = e^{-iEt/\hbar}$ og den tidsuavhengige schrödingerlikningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)\psi = E\psi.$$

Dette er en egenverdilikning. Operatoren på venstresiden kalles hamiltonoperatoren, og egenverdien E er energien.

Partikkel i boks

Med $V = 0$ på $[0,\pi]$ og $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ er egenfunksjonene $\psi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(nx)$ med

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m}.$$

Randverdiproblemet er det samme som for stangen og strengen, og det er bare tidsdelen som skiller de tre:

Problem	Tidsdel for $\sin(nx)$	Fysisk tolkning
Varmeledning i stang	$e^{-\alpha n^2 t}$	dør ut, raskest for stor n
Vibrerende streng	$\cos(cnt)$ og $\sin(cnt)$	overtoner med frekvens cn
Partikkel i boks	$e^{-i\hbar n^2 t/2m}$	stasjonære tilstander med energi E_n

Kvantiseringen av energinivåene er en konsekvens av randkrav og differensiallikning, akkurat som overtonene på en streng. Dette er det viktigste poenget å få frem. At funksjonene ψ_n er ortonormale i indreproduktet $\langle\Psi_k|\Psi_n\rangle$, er fourierrekker i ny forkledning.

Fri partikkel

De Broglies relasjoner $E = \hbar\omega$ og $p = \hbar k$ satt inn i $E = |p|^2/2m$ gir dispersjonsrelasjonen

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m},$$

og schrödingerlikningen med $V = 0$ er den likningen som har plane bølger med denne relasjonen som løsninger. Sammenlikn med $\omega = c|k|$ for bølgelikningen. Formelt er likningen en varmelikning med imaginær diffusivitet $i\hbar/2m$, og løsningsformelen fra kapittel 7 kan brukes direkte:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(v,0)\,e^{\frac{im(x-v)^2}{2\hbar t}}\,dv.$$

Med $\rho = |\Psi|^2$ og $j = \frac{\hbar}{m}\operatorname{Im}\left(\overline{\Psi}\,\partial_x\Psi\right)$ gjelder kontinuitetslikningen $\dot{\rho} + \partial_x j = 0$, så sannsynlighet er en bevart størrelse i samme forstand som masse og ladning. Fouriertransformen til Ψ gir sannsynlighetstettheten for bølgetallet, og dermed for bevegelsesmengden.

Den harmoniske oscillatoren en gang til

Med $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ er den tidsuavhengige likningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi = E\psi,$$

og energinivåene er $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. De kan finnes med Diracs stigeoperator

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} + im\omega x\right):$$

løser ψ likningen med energi E, løser $a_+\psi$ den med energi $E + \hbar\omega$. Grunntilstanden er en normalfordelingskurve, $\psi_0(x) = e^{-m\omega x^2/2\hbar}$, og de andre tilstandene er $a_+^n\psi_0$.

Hydrogenatomet

I tre dimensjoner, med det elektrostatiske potensialet fra protonet, er likningen

$$i\hbar\,\dot{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\Psi - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0|x|}\Psi,$$

der m_e er elektronmassen og q er elementærladningen. Tidsdelen separeres som før, og den tidsuavhengige likningen er

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0|x|}\psi = E\psi.$$

Skriver man laplaceoperatoren i kulekoordinater og setter $\psi(x) = R(r)Y(\theta,\varphi)$, får man én likning for den radielle delen og én for vinkeldelen. Kravet om at bølgefunksjonen går mot null langt fra kjernen gir

$$E_n = -\frac{m_e q^4}{2\left(4\pi\epsilon_0\right)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \approx -\frac{13.6\text{ eV}}{n^2}.$$

Eksempelet samler trådene fra kulekoordinater, separasjon av variable, potensrekkeløsninger og legendrepolynomer.

Oppgaver

9.1 Sett $\Psi(x,t) = f(t)\psi(x)$ inn i schrödingerlikningen og vis at

$$i\hbar\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

9.2 Bestem de tillatte energinivåene E_n ved å bruke randkravene og løsningene til den tidsuavhengige schrödingerlikningen, som blir

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + E\psi = 0$$

og bruk bornfortolkningen til å vise at løsningene til partikkel-i-boks-problemet er

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-E_n it/\hbar}\sin nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\frac{\hbar}{2m}n^2 t}\sin nx.$$

(Hint: Det meste av arbeidet i denne oppgaven har du faktisk allerede gjort. Hvis du ser nøye på varmelikningen og schrödingerlikningen, vil du se at det i bunn og grunn er samme likning dersom $V = 0$. Det er kun normaliseringen som gjenstår.)

9.3 Vis at bølgefunksjonene til de forskjellige energinivåene til partikkel-i-boks er ortonormale:

$$\langle \Psi_k | \Psi_n \rangle = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

(Hint: Merk at

$$\overline{f(t)} f(t) = e^{Eit/\hbar} e^{-Eit/\hbar} = 1$$

så lenge E er reell, så denne kansellerer alltid.)

9.4 Vis at dersom ψ løser den tidsuavhengige schrödingerlikningen for den harmoniske oscillatoren med energi E, løser $a_+\psi$ den samme likningen, men med energi $E + \hbar\omega$.

9.5 Bruk de Broglies relasjoner $E = \hbar\omega$ og $p = \hbar k$ på likningen $E = |p|^2/2m$. Hvilken dispersjonsrelasjon får du, og hvilken differensiallikning tilfredsstiller plane bølger med denne?

9.6 Sett $\rho = |\Psi|^2$ og

$$j = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\overline{\Psi}\, \partial_x \Psi\right) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\overline{\Psi}\, \partial_x \Psi - \Psi\, \partial_x \overline{\Psi}\right),$$

og vis at

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0.$$

Regn ut j for den plane bølgen $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ og tolk svaret.

9.7 Sett $\tau = i\hbar t/2m$ inn i løsningsformelen for varmelikningen på hele linjen (kapittel 7, med $\alpha = 1$) og vis at

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(v,0)\, e^{\frac{im(x-v)^2}{2\hbar t}}\, dv.$$

Varmekjernen $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$ glatter ut initialkravet. Hva gjør denne kjernen?
(Hint: Hva er absoluttverdien til $e^{im(x-v)^2/2\hbar t}$?)

9.8 Sett $\psi(x) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ inn i den tidsuavhengige schrödingerlikningen for hydrogenatomet, bruk uttrykket for laplaceoperatoren i kulekoordinater og vis at

$$\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d}{dr}\Big(r^2 R'(r)\Big) + \left(\frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} + Er^2\right) R(r) = \gamma R(r)$$

og at

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\right) = \gamma Y(\theta,\varphi)$$

der γ er en foreløbig ubestemt separasjonskonstant.

9.9 Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren, støter man visst på en situasjon der man må finne skjæringspunktet mellom kurvene gitt ved $y = \exp(-ax^2)$ og $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter. Finn skjæringspunktene med en numerisk likningsløser når $a = b = 1$. Hvorfor er det kun nødvendig å beregne det ene skjæringspunktet?

10 Felt og potensialer: gravitasjon og elektromagnetisme

Flervariabel analyse har flest fysiske eksempler, og nesten alle bygger på én funksjon,

$$u(x) = \frac{1}{|x|} \qquad \nabla u(x) = -\frac{x}{|x|^3} \qquad \Delta u(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0.$$

Gravitasjon og coulombfeltet

Kraften fra en masse M i origo på en masse m i x, og det elektriske feltet fra en ladning q i origo, er

$$F(x) = -GMm\frac{x}{|x|^3} \qquad E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}.$$

Begge er gradientfelt. Med fysikernes fortegn er $F = -\nabla V$ og $E = -\nabla\Phi$ der

$$V(x) = -\frac{GMm}{|x|} \qquad \Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|}.$$

Funksjonen u kan introduseres som temperaturen rundt et stearinlys, før den får sin egentlige rolle.

Arbeid

Arbeidet en kraft F gjør på en partikkel som følger kurven Γ parametrisert ved $x(t)$, $a \leq t \leq b$, er

$$\int_\Gamma F \cdot dx = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt.$$

En naturlig oppbygging starter med skolefysikkens kraft ganger vei: først en ting som dras tre meter bortetter gulvet, så samme kraft på skrå, så en flue som flyr opp på en pult. To resultater følger. Er F nettokraften, gir Newtons andre lov at arbeidet er lik endringen i kinetisk energi $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2$. Er $F = -\nabla V$, er arbeidet $V(x(a)) - V(x(b))$ uansett hvilken vei partikkelen tar. Den laminære vannstrømmen $f(x) = (x_2, 0)^T$ er et enkelt eksempel på et felt som ikke er konservativt. Arbeidet rundt en lukket kurve er da ikke null, og Greens teorem sier at det er integralet av rotasjonen over området kurven omslutter. En roterende plate med vinkelhastighet ω har hastighetsfeltet $(-\omega x_2, \omega x_1)^T$ med rotasjon 2ω, og dette gir den vanlige tolkningen av rotasjon: en kork i feltet snurrer med halve rotasjonen.

Fluks og Gauss' lov

Fluksen til et hastighetsfelt gjennom en flate er volumet som strømmer gjennom per tidsenhet. Bildet er en elv og en person med vadebukser som holder en ramme under vann. For coulombfeltet er fluksen ut av et kuleskall med radius R

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

uavhengig av R. Divergensen til feltet er null utenfor origo, men fluksen ut er ikke null, så ladningstettheten til en punktladning må være en diracpuls. Omvendt følger det av Gauss' lov og kulesymmetri at feltstyrken må gå som $1/r^2$. Samme argument med Ampères lov og sylindersymmetri gir at magnetfeltet rundt en lang, rett leder går som $1/r$.

Maxwells likninger

På differensialform er likningene

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times E = -\dot{B} \qquad \nabla \times B = \mu_0 J + \frac{1}{c^2}\dot{E}.$$

De kan brukes på fire måter. Først som motivasjon: de kan skrives opp i første forelesning som noe studentene skal kunne lese når emnet er ferdig. Så som øvelse i analysens fundamentalteorem: divergensteoremet og Stokes' teorem gir likningene på integralform. Så for statiske felt, der likningene dekobler og gir Poissons likning

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

for potensialet. Til slutt i tomt rom, der de gir bølgelikningene $\ddot{E} = c^2\Delta E$ og $\ddot{B} = c^2\Delta B$ fra kapittel 8. Tar man divergensen av den siste likningen og bruker den første, faller kontinuitetslikningen $\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$ ut, så ladningsbevaring er bygget inn.

Lorentzkraften og dreieimpuls

Kraften på en ladning q med fart v er $F = q(E + v \times B)$. Det magnetiske leddet står vinkelrett på v og gjør derfor aldri arbeid, som er en kort oppgave i kryssprodukt. Dreieimpulsen $L = x \times p$ tilfredsstiller $\tau = \dot{L}$, der τ er dreiemomentet, og kunstskøyteløperen som trekker armene inn er eksempelet på at L er bevart når $\tau = 0$.

Oppgaver

10.1 Et stearinlys står og brenner i origo. La oss anta at temperaturen i rommet er gitt ved

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

der $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Finn gradienten til u. Hvilken retning peker den? Hvordan ser nivåflatene ut?

10.2 Funksjonen u er ellers viktig i elektrostatikk. Finn Δu.

10.3 Gravitasjonskraften er konservativ. Finn potensialet.
(Hint: Sjekk ut gradienten til $u(x) = \frac{1}{|x|}$.)

10.4 Du drar en ting tre meter bortetter gulvet. Den veier fem kilo og du bruker kraften 10 N parallelt med fartsretningen. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

10.5 Du skal dra den samme tingen tre meter til bortetter gulvet, men arbeidsstillingen var litt knotete og du fikk vondt i ryggen, så du endrer stilling og bruker den samme kraften på 10 N, men nå med førtifem graders vinkel oppover istedet. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

10.6 En husflue (Musca Domestica) flyr langs en rett linje fra gulvet opp til kontorpulten og setter seg på den. Det er én meter opp og tre meter bort, og fluen veier 18 milligram. Hvor stort arbeid har tyngden gjort på fluen på denne trajektorien?

10.7 En partikkel med masse m følger banen $x(t)$, og F er summen av kreftene som virker på den. Partikkelens kinetiske energi er gitt ved $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$. Vis at

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}\,(t)\ dt.$$

Hva blir farten til klossen i oppgave 10.4 og 10.5 dersom vi antar at din kraft er den eneste som påvirker klossen i fartsretningen og at klossen var i ro når du startet?

10.8 En partikkel med masse på en kilo farer rundt i $\mathbb{R}^3$ kun påvirket av tyngdekraften fra en partikkel med masse på ett tonn. Den lette partikkelen reiser gjennom punktet $(1,1,1)^T$ og har kinetisk energi på én joule. Litt senere reiser den gjennom $(2,2,2)^T$. Hva er den kinetiske energien der?

10.9 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Brugden svømmer mot klokken fra $(0,1)^T$ den lange veien rundt til $(1,0)^T$. Hvor mye spiser den?

10.10 En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn det totale arbeidet kraften gjør på noe som reiser langs én gang rundt en sirkel sentrert i $(1,1)^T$ med radius 1. Regn ut arbeidet både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

10.11 Du står i en elv med vadebukser. Elven har konstant dybde på én meter, og elvens fart i meter per sekund er gitt ved $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Du har en kurve Γ parametrisert ved $x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ og du lurer på hvor mye vann som krysser denne kurven per tidsenhet. Sett opp et integral som gir svaret.

10.12 En punktladning q står i origo. Finn fluksen ut gjennom et kuleskall sentrert i origo.[10]

10.13 Det er faktisk slik at Gauss' lov og antagelsen om sfærisk symmetri impliserer Coulombs uttrykk for det elektriske feltet fra en punktladning. Utled at feltstyrken til en punktladning må gå som $1/r^2$ fra Gauss' lov på integralform.

10.14 På samme måte som for den elektriske punktladningen, kan vi utlede at den magnetiske feltstyrken rundt en lang strømførende ledning med konstant strømstyrke må gå som $1/s$, der s er avstanden til ledningen. Vis dette ut fra Ampères lov på integralform og antagelsen om radiell symmetri.

10.15 La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ og Σ en flate i $\mathbb{R}^3$. Utled Maxwells lover på integralform:

[10] I standardmodellen er q et heltall ganger elementærladningen e, med mindre det er en enslig kvark. Får du noe annet har du enten regnet feil eller en nobelpris i vente.

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx \qquad \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

10.16 For statiske felt dekobler Maxwells likninger. Vis at det elektriske feltet da er konservativt og at potensialet tilfredsstiller Poissons likning[11]

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

10.17 Vis at det magnetiske feltet aldri kan gjøre arbeid på en partikkel.

10.18 Utled og forklar hvorfor en snurrende kunstskøyteløper spinner fortere om vedkommende fordeler massen sin tettere på rotasjonsaksen.

10.19 Utled kontinuitetslikningen $\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$ fra Maxwells likninger.

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s_equation

11 Integralet som fysisk størrelse

Hvert nytt integral kan introduseres med samme lesemåte: integranden er en tetthet, og riemannsummen legger sammen tetthet ganger et lite stykke.

Integral	Integrand	Resultat
$\int_a^b i(t)\,dt$	strøm	ladning
$\int_a^b F(x)\,dx$	kraft	arbeid
$\int_\Gamma \rho\,ds$	masse per lengde	massen til en tråd
$\iint_\Sigma \rho\,dS$	masse per areal	massen til et tak
$\iiint_\Omega \rho\,dx$	masse per volum	massen til en klump
$\int_a^b f(v)\,dv$	sannsynlighetstetthet	sannsynlighet

Arbeid når kraften ikke er konstant

Tyngden på en masse m_2 i avstand r fra jordens sentrum er $F(r) = Gm_1m_2/r^2$. Arbeidet tyngden gjør under et fall fra høyden h over bakken er

$$\int_R^{R+h} \frac{Gm_1m_2}{r^2}\,dr = Gm_1m_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right),$$

der R er jordradien. Oppgave 11.1–11.3 sammenlikner dette med mgh for et hopp fra femmeteren og et fallskjermhopp fra 42 kilometers høyde. Feilen ved å regne med konstant g er under én prosent også i det siste tilfellet. En ideell gass som utvider seg fra V_1 til V_2 ved konstant temperatur, gjør arbeidet

$$\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = NTk\ln\frac{V_2}{V_1}$$

på stempelet.

Masse og massesenter

Massesenteret til en klump Ω med massetetthet ρ har koordinatene

$$\overline{x}_k = \frac{1}{\iiint_\Omega \rho\,dx}\iiint_\Omega x_k\,\rho(x)\,dx,$$

og tilsvarende for flater og kurver. Halvkuler og kuleskall er takknemlige legemer, fordi de trener både parametrisering og koordinatskift. Kapittel 12 forklarer hvorfor massesenteret er det riktige punktet å regne ut.

Den ideelle gasslov som flate

Funksjonen $T(p,V) = pV/Nk$ er et naturlig første eksempel på en funksjon av to variable. Nivåkurvene er isotermene, og isobarer på et værkart er nivåkurver for trykk. Flaten $f(x) = x_1x_2$ kan gå igjen som integrand i oppgaver om dobbeltintegraler, flateintegraler og koordinatskift, for eksempel som taket på en grillhytte.

Fordelinger

Normalfordelingen kan komme inn via et målt datasett, for eksempel breddene på bordene i en kai. Maxwell–Boltzmann-fordelingen

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

for farten til molekylene i en gass er et eksempel på en sannsynlighetstetthet der integralet må regnes numerisk. Normeringskonstanten $1/\sqrt{2\pi}$ i normalfordelingen regnes ut med polarkoordinater.

Planckfordelingen

Strålingen fra et svart legeme er fordelt på frekvenser etter

$$I(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Fordelingen er en fin anvendelse av taylorrekker. Første ledd i rekken $e^x - 1 = x + \cdots$ gir Rayleighs klassiske uttrykk $\omega^2 kT/\pi^2 c^3$, som stemmer for lave frekvenser, men gir uendelig total energi. Med $x = \hbar\omega/kT$ er den totale utstrålingen

$$\int_0^\infty I(\omega, T)\, d\omega = \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx,$$

og integralet kan regnes ut ved å skrive $1/(e^x - 1)$ som en geometrisk rekke i e^{-x}.

Oppgaver

11.1 Institutt for fysikk har målt tyngdeakselerasjonen $g \approx 9.8214675$ i kjelleren på realfagsbygget. Du hopper fra femmeteren på pirbadet. Hvor stort arbeid gjør tyngden på deg frem til du treffer vannspeilet?

11.2 Newtons gravitasjonslov sier at gravitasjonskraften på deg er

$$F(r) = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

der $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ er den universelle gravitasjonskonstanten, m_1 er jordens masse, og m_2 er din masse, og r din avstand fra jordens sentrum. Alan Eustace [12] hoppet i 2014 i fallskjerm fra en høyde på nesten 42 km. Hvor stort arbeid gjorde tyngden på ham?
(Du kan for øvrig se video av Felix Baumgartners 2012-rekord fra 39 km på youtube.)

11.3 Hva er tyngdeakselerasjonen 42 km opp? Hvor stor relativ feil gjør du i forrige oppgave dersom du antar $g \approx 9.8214675$ hele veien fra 42 km oppe og ned til bakken?
(Relativ feil er feilen delt på størrelsen det er snakk om. Relativ feil er viktig; hvis du måler avstanden bort til sidemannen og bommer med en meter, er det en ganske dårlig måling, men hvis du måler avstanden til månen og bommer med en meter, er det ganske bra.)

11.4 Et beholder med et stempel inneholder en ideel gass. Vi tilfører varme, men lar gassen ekspandere slik at temperaturen holdes konstant. Hva er arbeidet stempelet gjør på omgivelsene når volumet går fra V_1 til V_2?

[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Space_diving`

11.5 Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

11.6 Finn massesenteret til et halvt kuleskall med konstant massetetthet.

11.7 Skisser isotermene til den ideelle gasslov.

11.8 Rayleighs uttrykk er en approksimasjon til Plancks. Hvordan?

11.9 Siv har en kuleformet vanntank med radius R. På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

12 Kontinuumsmekanikk

Med divergensteoremet og litt lineær algebra kommer man fra Newtons lover for punktpartikler til fluidmekanikk.

Massesenteret

En fotball som lobbes svakt, går omtrent i en parabel, men har den litt skru, er det ingen av atomene i ballen som gjør det. Består ballen av n partikler med posisjon x_k og masse m_k, er $\sum_k m_k \ddot{x}_k$ lik summen av alle kreftene. De indre kreftene opphever hverandre parvis etter Newtons tredje lov, så

$$M\ddot{\overline{x}} = F_{\text{ytre}} \qquad \overline{x} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

Massesenteret beveger seg som en punktpartikkel, og det er derfor det er verdt å regne ut.

Arkimedes' lov

Det hydrostatiske trykket på dybden x_3 er $p(x) = ax_3 + b$, der b er atmosfæretrykket og a er omtrent ti tusen pascal per meter. Kraften fra trykket på et neddykket legeme Ω er

$$-\oiint_{\partial\Omega} p\, e_n \, dS = -\iiint_{\Omega} \nabla p \, dx = -a\,|\Omega|\, e_3,$$

der e_n er enhetsnormalen ut av Ω og $|\Omega|$ er volumet. Kraften peker mot avtagende dybde og er lik vekten av det fortrengte vannet, og det er ingen netto kraft sidelengs. En fridykker i våtdrakt er et godt oppfølgingseksempel: trykket komprimerer dykkeren på vei ned, så oppdriften avtar med dybden, og dybden der oppdrift og tyngde balanserer er et ustabilt likevektspunkt.

Opplevd endring

Flyr man gjennom et temperaturfelt $f(x,t)$ langs banen $x(t)$, er den opplevde temperaturendringen

$$\frac{d}{dt} f(x(t),t) = \dot{f} + \nabla f \cdot \dot{x}.$$

Dette er kjerneregelen, og det er samme uttrykk som gir leddet $(\partial_x v)v$ i akselerasjonen til en væskepartikkel. En flue som flyr i en heliks gjennom et temperaturfelt er en annen variant.

Spenning og Navier–Stokes

Kreftene på en væskeklump deles i volumkrefter, som tyngden, og kontaktkrefter, som virker gjennom overflaten. Kontaktkraften på en liten flate med normal e_n er σe_n ganger arealet, der σ er spenningstensoren. Divergensteoremet gjør kontaktkreftene om til en krafttetthet $\nabla \cdot \sigma$, og Newtons andre lov per volum blir

$$\rho\,(\dot{v} + (\partial_x v)v) = \nabla \cdot \sigma + f.$$

Med trykk og Newtons lov for viskositet i σ er dette Navier–Stokes-likningene. For stasjonær, friksjonsfri og rotasjonsfri strøm uten volumkrefter står det igjen Bernoullis likning

$$\nabla\left(\frac{\rho v^2}{2} + p\right) = 0.$$

Rotasjon og deformasjon

Friksjon oppstår bare når væskepartiklene flytter seg i forhold til hverandre. For et lineært hastighetsfelt $v(x) = Ax$ beskriver den skjevsymmetriske delen av A en stiv rotasjon, som ikke gir friksjon, og den symmetriske delen en deformasjon langs egenvektorene. Dette begrunner viskositetsloven, og det er en av få anvendelser der studentene ser symmetriske og skjevsymmetriske matriser gjøre forskjellige fysiske ting.

Oppgaver

12.1 En fotball som lobbes svakt slik at luftmotstanden er neglisjerbar, går sånn omtrent i en parabel. La oss si at ballen er sammensatt av n partikler med posisjon $x_k(t)$ og masse m_k. Det er klart at

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k = \sum_l F_l$$

der telleren l på høyre side løper over alle eksterne krefter - alle interne krefter mellom partiklene må summere til null på grunn av Newtons tredje lov. Vis at punktet $x(t)$ som går i en parabel må tilfredsstille

$$x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$$

der

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

er den totale massen.

12.2 Vis at det hydrostatiske trykket ikke leverer netto kraft sidelengs i vannmassene og at oppdriften er gitt ved arkimedes' lov.

12.3 Kroppen består mest av vann, og vann er tilnærmet inkompressibelt, så komprimeringen foregår stort sett på lungevolumet, som er omtrent seks liter for et voksent gjennomsnittsmenneske. Tettheten til et menneske ligger på om lag 985 gram per liter og lungene utgjør ca en tiendedel av kroppens totale volum. På hvilken dybde begynner et nakent gjennomsnittsmenneske med fulle lunger å synke?

12.4 Tenk at du flyr rundt i et fly eller et helikopter og at $f(x,t)$ er temperaturen og $x(t)$ din trajektorie. Finn et uttrykk for din opplevde temperaturforandring

$$\frac{d}{dt} f(x(t), t)$$

og utled likningen for **tørt vann**:[13]

$$\rho \left(\dot{v} + (\partial_x v) v \right) = -\nabla p - \rho g e_3$$

12.5 Utled Bernoullis likning

$$\nabla \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) = 0.$$

[13] `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_40.html`

12.6 Hva blir strømlinjene til $v(x) = Ax$ dersom A er skjevsymmetrisk?
(Hint: Løsningen av $\dot{x} = Ax$ er $x(t) = e^{tA}x(0)$, og når A er skjevsymmetrisk, er e^{tA} en rotasjon.)

12.7 Hvordan blir strømlinjene til

$$v(x) = Ax$$

om A er symmetrisk?
(Hint: Legg koordinataksene langs egenvektorene til A.)

13 Relativitet og alembertoperatoren

Det siste eksempelet handler om hvilke koordinatskift som bevarer bølgelikningen.

Galilei og Lorentz

To koordinatsystemer beveger seg med konstant fart v i forhold til hverandre langs x_1-aksen. Den galileiske transformasjonen er $y_1 = x_1 - vt$ med samme tid i begge systemer. Den bevarer Newtons lover, men ikke alembertoperatoren

$$\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta.$$

Maxwells likninger sier at lys går med farten c, og spørsmålet i 1905 var i hvilket koordinatsystem. Svaret er at lyset har farten c i alle inertialsystemer, og da må tiden transformeres også.

Togeksperimentet

En togvogn med takhøyde L kjører med farten v. Et foton sendes fra gulvet til taket. For en passasjer tar det tiden $\tau = L/c$. Sett fra perrongen har toget flyttet seg vt i mellomtiden, så fotonet har gått lengden $\sqrt{L^2 + v^2t^2}$ på tiden t, og

$$c^2t^2 = L^2 + v^2t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \gamma\tau \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$

Fullfører man resonnementet, får man lorentztransformasjonen

$$y_1 = \gamma(x_1 - vt) \qquad \tau = \gamma\left(t - \frac{vx_1}{c^2}\right),$$

og en direkte regning med kjerneregelen viser at den bevarer $\Box$.

Boost som matriseeksponential

Med $x = (ct, x_1, x_2, x_3)$ er lorentztransformasjonen en matrise Λ som bevarer minkowskiproduktet $x^T\eta x$. Den kan skrives $\Lambda = e^{\lambda K}$ der generatoren K er symmetrisk. Rotasjoner er $e^{\theta K}$ med skjevsymmetrisk K, så sammenlikningen ligger rett i dagen: skjevsymmetrisk generator gir cosinus og sinus, symmetrisk generator gir cosh og sinh.

Energi og bevegelsesmengde

Firehastigheten er $u = \gamma(c, v)$, og $p = mu$ er firebevegelsesmengden. Romdelen er γmv, og tidsdelen ganget med c er

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

når $v \ll c$. Minkowskiproduktet $p^T\eta p$ gir

$$E^2 = |p|^2c^2 + m^2c^4,$$

der p på høyresiden er romdelen. To elektroner, ett på toget og ett på perrongen, er et godt avslutningseksempel: observatørene er uenige om hvor mye av kraften mellom elektronene som er elektrisk og hvor mye som er magnetisk, men enige om hvordan elektronene beveger seg.

Oppgaver

13.1 Arbeidshesten er et oppsett med to koordinatsystemer der det ene beveger seg med konstant rettlinjet fart i forhold til det andre. La oss kalle det ene x og det andre y og den relative farten mellom dem v. Hva er koordinattransformasjonen som tar deg mellom x og y?
(Dette kalles en **galileisk transformasjon**.[14])

13.2 Et foton reiser langs en rett linje fra ett punkt til et annet. Avstanden mellom punktene er s og det tar tiden t. Vis at i to forskjellige inertialsystemer må s/t være den samme.

13.3 La oss si at både x_1 og y_1 er rettet langs en rettlinjet togskinne, og i en togvogn med takhøyde L som reiser med farten v_1 sendes et foton fra gulvet og opp i et speil i taket og ned igjen til en fotonmåler på samme sted som fotonet ble sendt ut. Én person står i togvognen og måler tiden dette tar, mens en annen står i ro ved siden av togskinnen og måler det samme mens toget kjører forbi. Vis at forholdet mellom de målte tidene er

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

13.4 Sjekk at den romlige envariable alembertoperatoren

$$\frac{1}{c^2}\ddot{u} - \partial_{x_1}^2 u$$

er invariant under lorentztransformasjonen

$$y_1 = \gamma(x_1 - vt) \qquad \tau = \gamma\left(t - \frac{vx_1}{c^2}\right).$$

13.5 Et elektron kjører tog mens et annet elektron står og ser på. Toget har farten v. Lorentzkraften[15] på det ene elektronet fra det andre er

$$F = q\left(E + v \times B\right).$$

Det er klart at begge partiklene omsluttes av hvert sitt elektriske felt. Men er det et magnetisk felt? Hvis ja, hvilket av dem lager det?

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_transformation
[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force