

9 - DOBBELTINTEGRALER - LF

- 1 Volumet av en dreining av sinuskurven mellom to nullpunkter er

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 1 - \cos(2x) \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

- 2 Vi dreier $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ på $[-r, r]$ og får

$$\pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 \, dx = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

- 3 For et vakkert volum:

$$\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \pi.$$

Arealet under $1/x$ er uendelig, men volumet er endelig.

- 4 Den krumme delen av randen er en kvart ellipse med likning

$$\frac{x_1^2}{4^2} + \frac{x_2^2}{3^2} = 1$$

og løser vi denne for x_2 og tar det positive rotutdraget, får vi

$$x_2 = \sqrt{3^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4^2} \right)} = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x_1^2}.$$

Takhøyden er $f(x) = x_1 x_2$, så kapper vi grillhytten i to parallelt med x_2 -aksen, er arealet av tverrsnittet gitt ved

$$A(x_1) = \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}} x_1 x_2 \, dx_2.$$

- 5 Volumet blir

$$\begin{aligned} \int_0^4 A(x_1) \, dx_1 &= \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}} x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}} dx_1 \\ &= \frac{9}{32} \int_0^4 x_1 (16 - x_1^2) \, dx_1 = 18. \end{aligned}$$

- 6 Vi integrerer takhøyden $x_1 x_2$ fra $x_1 = 0$ til $x_1 = 1$ og får tverrsnittet som funksjon av x_2 , så motorsaga gikk parallelt med x_1 -aksen denne gangen. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x_2 \, dx_2 = 1.\end{aligned}$$

- 7 Vi integrerer takhøyden $x_1 x_2$ fra $x_2 = 0$ til $x_2 = 2$ og får tverrsnittet

$$A(x_1) = \int_0^2 x_1 x_2 \, dx_2,$$

så nå går motorsaga parallelt med x_2 -aksen. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 x_2^2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1 \\ &= 2 \int_0^1 x_1 \, dx_1 = 1.\end{aligned}$$

- 8 Hypotenusen går fra $(1, 0)^T$ til $(0, 2)^T$ og har likning $x_2 = 2 - 2x_1$. La oss først la saga gå parallelt med x_2 -aksen. Da blir arealet av tverrsnittet

$$A(x_1) = \int_0^{2-2x_1} x_1 x_2 \, dx_2,$$

og volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_0^{2-2x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 x_2^2 \Big|_0^{2-2x_1} dx_1 \\ &= 2 \int_0^1 x_1 (1 - x_1)^2 \, dx_1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Lar vi saga gå andre veien, skriver vi hypotenusen som $x_1 = 1 - x_2/2$ og får tverrsnittsfunksjonen

$$A(x_2) = \int_0^{1-x_2/2} x_1 x_2 \, dx_1,$$

slik at volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^2 \int_0^{1-x_2/2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 x_2 \, dx_2 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

- 9 Hypotenusen går fra origo til $(3, 4)^T$ og har likning $x_2 = 4x_1/3$, så vi beregner

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^3 \int_0^{4x_1/3} x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \, dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^3 x_1^2 (4x_1/3) + \frac{1}{3} (4x_1/3)^3 + \frac{1}{2} x_1 (4x_1/3)^2 - 3x_1 (4x_1/3) - \frac{3}{2} (4x_1/3)^2 + 3 (4x_1/3) \, dx_1 \\ &= \int_0^3 \frac{4}{3} x_1^3 + \frac{64}{81} x_1^3 + \frac{8}{9} x_1^3 - 4x_1^2 - \frac{8}{3} x_1^2 + 4x_1 \, dx_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^4 + \frac{16}{81} \cdot 3^4 + \frac{2}{9} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{8}{9} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 \\ &= 27 + 16 + 18 - 36 - 24 + 18 = 19.\end{aligned}$$

- 10 Her er det enklest å la saga gå parallelt med x_1 -aksen først. Den ene skrå delen av randen har likning $x_2 = x_1$, og den andre har likning $x_2 = 2 - x_1$, så integralet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_{x_2}^{2-x_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1=x_2}^{x_1=2-x_2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((2-x_2)^2 - x_2^2\right) x_2 \, dx_2 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Går vi motsatt vei, må vi dele opp integralet, så det blir litt mer herk:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_0^{2-x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}.$$

Husk alltid å tegne opp, ellers er det lett å tenke feil.

- 11 Dette integralet går fint å sette opp i én smell, men da trenger vi et triks vi lærer senere i økten (se oppgave 24). I påvente av det, må vi nesten sette det opp i to deler enten slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^0 \int_{-x_1-1}^{x_1+1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_0^1 \int_{x_1-1}^{1-x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = 0$$

eller slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^0 \int_{-x_2-1}^{x_2+1} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_{x_2-1}^{1-x_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = 0.$$

At integralene blir null, får vi fra symmetrien til Ω og $f(x) = x_1x_2$: det som ligger over x_1x_2 -planet i første og tredje kvadrant, veies nøyaktig opp av det som ligger under i andre og fjerde.

- 12 Parabelen er surefjes og skjærer x_1 -aksen i $x_1 = \pm 1$, så volumet blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x_1^2} x_1x_2 \, dx_2 dx_1 = 0.$$

Også her blir integralet null på grunn av symmetrien til Ω og $f(x) = x_1x_2$. Integralet kan også settes opp slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x_2}}^{\sqrt{1-x_2}} x_1x_2 \, dx_1 dx_2 = 0.$$

- 13 Kurven $x_2 = 1 - x_1^3$ skjærer x_1 -aksen i $x_1 = 1$, og x_2 -aksen i $x_2 = 1$, så volumet blir

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1^3} x_1x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1(1-x_1^3)^2 \, dx_1 = \frac{9}{80} \end{aligned}$$

eller

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{1-x_2}} x_1x_2 \, dx_1 dx_2 = \frac{9}{80}.$$

- 14 Her er grafen en kjegle med høyde a (slik som du har på fotballbanen), og den skjærer x_1x_2 -planet i en sirkel med radius a , så volumet blir en tredjedel av grunnflate ganger høyde, altså $\pi a^3/3$.

- 15 Dette er en halvkule med radius a , så volumet blir $\frac{2\pi}{3}a^3$.

- 16 En sylinder med høyde a og grunnflate πa^2 , så volumet blir πa^3 .

- 17 Hårete greier:

$$\iint_{\Omega} h = \int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{16-x_1^2}} -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \, dx_2 dx_1.$$

Denne tar vi med et triks senere i økten, se oppgave 32. Svaret blir $118 - 3\pi/2 \approx 113.3$.

- 18 Siden $0 \leq x_1x_2 < 1$ på enhetskvadratet (bortsett fra i hjørnet $(1,1)^T$), kan vi bruke den geometriske rekken og skrive

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dx}{1-x_1x_2} &= \iint_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} (x_1x_2)^k \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\Omega} (x_1x_2)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x_1^k \, dx_1 \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

At det i dette tilfellet går greit å bytte om rekkefølgen på sum og integral, har vi ikke lært, men pytt sann. Vi er da ingeniører.

- 19 Den øvre halvdelen av ellipsen er $x_2 = b\sqrt{1 - x_1^2/a^2}$, og substitusjonen $x_1 = a \sin \theta$, $dx_1 = a \cos \theta d\theta$ gir

$$4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} dx_1 = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \pi ab.$$

Jeg kommer ikke til å be deg om å beregne envariable integraler på eksamen.

- 20-1 Bildet av enhetskvadratet er alltid parallelogrammet utspent av kolonnene i A , for $A(1,0)^T$ og $A(0,1)^T$ er kolonnene, og $A(1,1)^T$ er summen av dem. Her får vi parallelogrammet med hjørner i $(0,0)^T$, $(2,1)^T$, $(1,2)^T$ og $(3,3)^T$.
- 20-2 Kvadratet $[0,2] \times [0,2]$. Matrisen strekker med en faktor 2 i alle retninger.
- 20-3 Rektangelet $[0,2] \times [0,1]$. Matrisen strekker med en faktor 2 i x_1 -retningen.
- 20-4 Matrisen bytter om koordinatene, altså speiler om linja $x_2 = x_1$, så bildet er enhetskvadratet selv. Hjørnene $(1,0)^T$ og $(0,1)^T$ bytter plass.
- 20-5 Her er kolonnene lineært avhengige, så alle punktene i enhetskvadratet havner på linjestykket fra origo til $(2,2)^T$.
- 20-6 Dette blir enhetskvadratet dreid vinkelen α mot klokken om origo.
- 20-7 Vi har

$$\begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & 2 \cos \alpha \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

så denne dreier enhetskvadratet og strekker det med en faktor 2 i alle retninger.

- 20-8 Her ser vi at

$$\begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så denne strekker med en faktor 2 i x_1 -retningen og dreier så vinkelen α mot klokken. Bildet er rektangelet $[0,2] \times [0,1]$ dreid vinkelen α .

- 21 Arealet av parallelogrammet utspent av kolonnene er absoluttverdien av determinanten. I rekkefølge får vi

$$3, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 4, \quad 2.$$

I 20-4 er determinanten -1 ; fortegnet sier at speilingen snur orienteringen, men arealet er 1.

- 22 Ω er parallelogrammet fra 20-1, og vi kunne i og for seg delt integralet i tre slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_{x_1/2}^{2x_1} x_1 x_2 dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_{x_1/2}^{x_1/2+3/2} x_1 x_2 dx_2 dx_1 + \int_2^3 \int_{2x_1-3}^{x_1/2+3/2} x_1 x_2 dx_2 dx_1,$$

men dette er jo litt knotete. Vi kan heller observere at avbildningen $x = Ay$ fra 20-1 tar enhetskvadratet til Ω . Med $x_1 = 2y_1 + y_2$ og $x_2 = y_1 + 2y_2$ evaluerer vi takhøyden i de nye

koordinatene og ganger med arealfaktoren 3:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= 3 \int_0^1 \int_0^1 (2y_1 + y_2)(y_1 + 2y_2) dy_2 dy_1 \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^1 2y_1^2 + 5y_1 y_2 + 2y_2^2 dy_2 dy_1 = 3 \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{31}{4}.\end{aligned}$$

- 23 Samme greia her, men rotasjonsmatrisen strekker ikke areal, så det er nok å evaluere den ideelle gasslov i de roterte koordinatene. Med $c = \cos(\pi/6)$ og $s = \sin(\pi/6)$ blir det

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^1 (y_1 c - y_2 s)(y_1 s + y_2 c) dy_2 dy_1 = \frac{cs}{3} + \frac{c^2 - s^2}{4} - \frac{cs}{3} = \frac{\cos(\pi/3)}{4} = \frac{1}{8}.$$

- 24 Generelt er

$$\iint_{A\Omega_0} f(x) dx = |\det A| \iint_{\Omega_0} f(Ay) dy,$$

og Ω_0 er enhetskvadratet. Regningen fra forrige oppgave med en vilkårlig vinkel gir

$$\int_0^1 \int_0^1 (y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)(y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) dy_2 dy_1 = \frac{\cos 2\alpha}{4},$$

og med dette får vi

	20-1	20-2	20-3	20-4	20-5	20-6	20-7	20-8
volum	$\frac{31}{4}$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\cos 2\alpha}{4}$	$4 \cos 2\alpha$	$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

I 20-5 har bildet areal null, så volumet er null. I 20-7 er arealfaktoren 4 og integranden fire ganger så stor som i 20-6. I 20-8 er arealfaktoren 2, og

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 \int_0^1 (2y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)(2y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) dy_2 dy_1 &= 2 \left(\cos \alpha \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2} \right) \\ &= \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Diamanten er bildet av enhetskvadratet under den **affine avbildningen**

$$x = \sqrt{2}R(\pi/4)(y - (1, 1)^T/2),$$

der $R(\pi/4)$ er matrisen som roterer $\pi/4$ mot klokken (en affin avbildning er en lineæravbildning pluss en konstant). Areal faktoren er $\det(\sqrt{2}R(\pi/4)) = 2$, og flytter vi enhetskvadratet slik at det får sentrum i origo, blir integralet

$$\iint_{\Omega} f = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) dy_2 dy_1 = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} y_1^2 - y_2^2 dy_2 dy_1 = 0,$$

akkurat som i oppgave 11.

- 25 Lureoppgave. Tidlig i semesteret fant vi at $g'(x) = A$, så jacobideterminanten til g er determinanten til A .

26 Vi beregner

$$g'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \partial_r g_1(r, \theta) & \partial_\theta g_1(r, \theta) \\ \partial_r g_2(r, \theta) & \partial_\theta g_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

og determinanten blir følgelig

$$\det g'(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

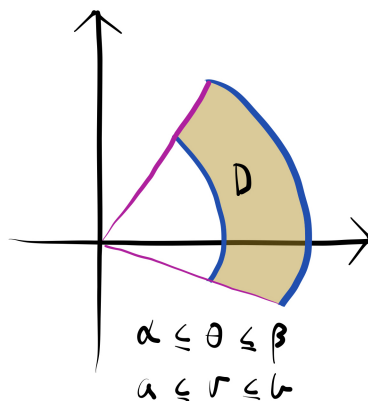
Siden rektangelet $[0, 1] \times [0, \pi/2]$ går til enhetssirkelskivens bit i første kvadrant, blir volumet

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

27 Ω er den delen av ringen mellom sirklene med radius 1 og 2 som ligger mellom linjene $x_2 = x_1$ og $x_2 = -x_1$ i øvre halvplan. Integralet blir likt som i forrige oppgave, men med andre integrasjonsgrenser:

$$\iint_{\Omega} f = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = \frac{15}{4} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0.$$

Det som ligger over planet til høyre for x_2 -aksen, veies opp av det som ligger under til venstre. Her er en generisk figur:



28 Med konstant massetetthet ρ og $\Omega = A\Omega_0$ er

$$m = \rho |\det A| \quad \text{og} \quad \iint_{\Omega} x \rho dx = \rho |\det A| \iint_{\Omega_0} Ay dy = \rho |\det A| A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

så massesenteret er bildet av sentrum i enhetskvadratet, $A(1/2, 1/2)^T$. Det gir

20-1 og oppgave 22	$(3/2, 3/2)^T$
20-2	$(1, 1)^T$
20-3	$(1, 1/2)^T$
20-4	$(1/2, 1/2)^T$
20-5	$(1, 1)^T$, midtpunktet på linjestykket
20-6	$\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha)^T$
20-7	$(\cos \alpha - \sin \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha)^T$
20-8	$(\cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha, \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha)^T$
oppgave 23	$((\sqrt{3} - 1)/4, (\sqrt{3} + 1)/4)^T$
diamanten	origo

I 20-5 er arealet null, så der må vi tenke på en tynn stav med jevn massefordeling.

- 29 La oss si at kakestykket Ω ligger med spissen i origo og går vinkelen α ut på hver side av x_1 -aksen, har radius a og massetetthet ρ . Massen er $m = \rho \alpha a^2$, og massesenteret blir

$$\frac{1}{m} \iint_{\Omega} x \rho \, dx = \frac{1}{\rho \alpha a^2} \begin{pmatrix} \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \cos \theta \, dr d\theta \\ \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr d\theta \end{pmatrix} = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For et veldig smalt stykke går $\sin \alpha / \alpha \rightarrow 1$, og massesenteret havner to tredjedeler av veien ut, som i en trekant.

- 30 Vi setter

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

og skriver $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ og $u_1 = \partial_{x_1} u$ og så videre. Kjernerregelen gir

$$\partial_r v = u_1 c + u_2 s,$$

$$\partial_r^2 v = u_{11} c^2 + 2u_{12} cs + u_{22} s^2,$$

$$\partial_{\theta} v = -u_1 r s + u_2 r c,$$

$$\partial_{\theta}^2 v = r^2 (u_{11} s^2 - 2u_{12} cs + u_{22} c^2) - r(u_1 c + u_2 s).$$

Deler vi den siste på r^2 og legger sammen, kansellerer førsteordensleddene og de blandede leddene, og vi står igjen med

$$\partial_r^2 v + \frac{1}{r} \partial_r v + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta}^2 v = u_{11} (c^2 + s^2) + u_{22} (s^2 + c^2) = \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u.$$

Avhenger ikke u av θ , blir Laplaces likning

$$u'' + \frac{1}{r} u' = \frac{1}{r} (ru')' = 0,$$

så $ru' = A$ og

$$u = A \ln r + B.$$

Dette er for eksempel potensialet rundt en lang, rett ledning.

31 En klassiker! Siden

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi,
\end{aligned}$$

må

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

32 Avbildningen

$$x = g(r, \theta) = \begin{pmatrix} ar \cos \theta \\ br \sin \theta \end{pmatrix}$$

tar rektangelet $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ til ellipseskiven, og jacobideterminanten blir abr . Grillhytten står på den kvarte ellipseskiven med $a = 4$ og $b = 3$, som er bildet av $[0, 1] \times [0, \pi/2]$, og med taket fra oppgave 17 blir volumet

$$\iint_{\Omega} h = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-16r^2 \cos^2 \theta - 12r^2 \cos \theta \sin \theta - 18r^2 \sin^2 \theta + 16r \cos \theta + 18r \sin \theta + 8) 12r d\theta dr.$$

Med $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \pi/4$, $\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 1/2$ og $\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1$ blir dette

$$\int_0^1 12r^3 \left(-\frac{17\pi}{2} - 6\right) + 12r^2 \cdot 34 + 12r \cdot 4\pi dr = -\frac{51\pi}{2} - 18 + 136 + 24\pi = 118 - \frac{3\pi}{2} \approx 113.3.$$

33 Koordinattransformasjonen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

er en rotasjon på $\pi/4$. Setter vi dette inn for x i funksjonen, får vi

$$\begin{aligned}
h(x(y)) &= 1 - \frac{1}{2} (y_1 - y_2)^2 - \frac{1}{2} (y_1 - y_2) (y_1 + y_2) - \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2,
\end{aligned}$$

og setter vi denne lik en konstant C , får vi

$$\frac{3}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 = 1 - C,$$

som er ellipser. Ekvidistanselinjene er altså ellipser dreid $\pi/4$. På havnivået er $C = 0$, og halvaksene er $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$. Med $y = \left(\sqrt{2/3}r \cos \theta, \sqrt{2}r \sin \theta\right)^T$ tar vi rektangelet $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ til øya. Jacobideterminanten er $\sqrt{2/3}\sqrt{2}r = 2r/\sqrt{3}$, rotasjonen endrer ikke areal, og $h = 1 - r^2$, så volumet av øya blir

$$\iint_{\Omega} h = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

- 34 Vi prøver oss på nye koordinater v_1 og v_2 slik at $v_1 = 1$ gir $x_2 = x_1^2$, $v_1 = 2$ gir $x_2 = 2x_1^2$, $v_2 = 1$ gir $x_1 = x_2^2$ og $v_2 = 2$ gir $x_1 = 2x_2^2$. Dette lukter av likningene

$$x_2 = v_1 x_1^2 \quad \text{og} \quad x_1 = v_2 x_2^2.$$

Setter vi den første inn i den andre, får vi

$$x_1 = v_2 v_1^2 x_1^4,$$

og setter vi den andre inn i den første, får vi

$$x_2 = v_1 v_2^2 x_2^4,$$

slik at alt i alt er

$$x = g(v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt[3]{v_1^2 v_2} \\ 1/\sqrt[3]{v_1 v_2^2} \end{pmatrix}$$

en koordinattransformasjon som tar kvadratet $[1, 2] \times [1, 2]$ til Ω . Så er det bare å brette opp ermene og beregne jacobideterminanten. Først beregner vi

$$g'_1(v) = \frac{-1}{3(v_1^2 v_2)^{4/3}} (2v_1 v_2, v_1^2) \quad \text{og} \quad g'_2(v) = \frac{-1}{3(v_1 v_2^2)^{4/3}} (v_2^2, 2v_1 v_2),$$

slik at jacobideterminanten blir

$$|g'(v)| = \frac{4-1}{9v_1^2 v_2^2} = \frac{1}{3v_1^2 v_2^2}.$$

Takhøyden er $x_1 x_2 = 1/(v_1 v_2)$, og integralet blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v_1^3 v_2^3} dv_2 dv_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{64}.$$

- 35 Ellipsen er dreid $\pi/4$ radianer rundt origo. Koordinattransformasjonen

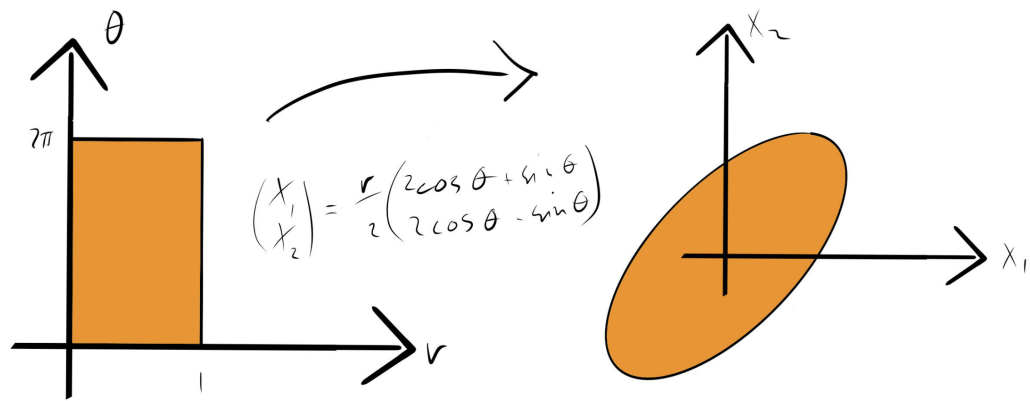
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

er en ren rotasjon, og ellipselikningen blir

$$\frac{y_1^2}{2} + 2y_2^2 = 1,$$

som forteller oss at halvaksene er $\sqrt{2}$ og $1/\sqrt{2}$. Videre ser du forhåpentligvis at en fornuftig koordinattransformasjon er

$$x(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}r \cos \theta \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta - \sin \theta \\ 2 \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix}.$$



Vi beregner jacobideterminanten:

$$\partial_r x_1 \partial_\theta x_2 - \partial_r x_2 \partial_\theta x_1 = r$$

og integrerer:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f \, dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{2} (2\cos\theta - \sin\theta) + 2 \left(\frac{r}{2} (2\cos\theta + \sin\theta) \right) + 4 \right) r \, d\theta \, dr \\ &= 8\pi \int_0^1 r \, dr = 4\pi. \end{aligned}$$

Leddene med $\cos\theta$ og $\sin\theta$ forsvinner når vi integrerer over en hel periode. Det er det samme som å si at 4 ganger arealet π blir 4π , siden ellipsen har sentrum i origo og de lineære leddene veier hverandre opp.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Vi flytter polarkoordinatene til sirkelens sentrum, $x = (2 + r \cos \theta, 1 + r \sin \theta)^T$ med $0 \leq r \leq 3$, og får jacobideterminant r som vanlig. Da er

$$f = (2 + r \cos \theta)^2 - (1 + r \sin \theta)^2 + 1 = 4 + 4r \cos \theta - 2r \sin \theta + r^2 \cos 2\theta,$$

og alt som inneholder $\cos \theta$, $\sin \theta$ eller $\cos 2\theta$ integrerer til null over en hel runde, så

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r \, d\theta \, dr = 8\pi \cdot \frac{9}{2} = 36\pi.$$

Det er $f(2, 1) = 4$ ganger arealet 9π : sadelflaten ligger like mye over som under tangentplanet i sentrum, fordi f er harmonisk ($\Delta f = 0$) - det er middelverdiegenskapen fra økt 13, og den gjelder for enhver sirkelskive.

- 2 Grafen er et plan, og volumet under et plan over en sirkelskive er høyden i sentrum ganger arealet - det som stikker opp på den ene siden av sentrum mangler på den andre. Regner du, blir det med $x = (1 + r \cos \theta, 1 + r \sin \theta)^T$

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + 2r \cos \theta + r \sin \theta) r \, d\theta \, dr = 4 \cdot 2\pi \int_0^1 r \, dr = 4\pi,$$

altså $f(1, 1) \cdot \pi = 4\pi$.

- 3 Kvadratet står på høykant, så det er stygt å integrere rett fram - du må dele i to, $\int_0^1 \int_{1-x_1}^{1+x_1} + \int_1^2 \int_{x_1-1}^{3-x_1}$. Penere er koordinatavbildningen

$$x = g(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y,$$

som sender enhetskvadratet $[0, 1]^2$ i y -planet til Ω (hjørnet $(1, 0)^T$ pluss y_1 ganger kanten $(1, 1)^T$ pluss y_2 ganger kanten $(-1, 1)^T$), med jacobideterminant $\det g' = 2$ - kvadratet har areal 2. Siden $x_1 - 2x_2 = 1 - y_1 - 3y_2$, blir

$$\iint_{\Omega} f = 2 \int_0^1 \int_0^1 9 - (1 - y_1 - 3y_2)^2 \, dy_2 \, dy_1 = 18 - 2 \int_0^1 \int_0^1 (1 - y_1 - 3y_2)^2 \, dy_2 \, dy_1.$$

Ganger vi ut, er $(1 - y_1 - 3y_2)^2 = (1 - y_1)^2 - 6(1 - y_1)y_2 + 9y_2^2$, som integrerer til $\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 = \frac{11}{6}$, så volumet er

$$18 - \frac{11}{3} = \frac{43}{3}.$$

Rimelig: f ligger mellom 0 og 9 på Ω , så volumet må ligge mellom 0 og 18.

- 4 I polarkoordinater er $f = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + 1 = r^2 \cos 2\theta + 1$, så

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \cos 2\theta + 1) r \, d\theta \, dr = 0 + 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Sadelen $x_1^2 - x_2^2$ bidrar med null - den er like mye over som under null - og igjen er svaret $f(0)$ ganger arealet, jf. gammel eksamensoppgave 1.