

6 - FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE II - LF

- 1 Vi deriverer E med hensyn på tiden og bruker kjerneregelen fra skolen på hvert ledd:

$$\dot{E} = Cx_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 = Cx_1\left(-\frac{1}{C}x_2\right) + Lx_2\left(\frac{1}{L}x_1\right) = -x_1x_2 + x_1x_2 = 0.$$

Energien flytter seg mellom kondensatoren og spolen, men summen står stille.

- 2 Kurvene der E er konstant tilfredsstiller

$$\frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2 = E_0,$$

som kan skrives om til

$$\frac{x_1^2}{2E_0/C} + \frac{x_2^2}{2E_0/L} = 1.$$

Dette er ellipser med halvakser $\sqrt{2E_0/C}$ og $\sqrt{2E_0/L}$, én for hvert energinivå, lagvis utover fra origo. Retningen leser vi av systemet i et punkt på den positive x_1 -aksen: der er $\dot{x}_1 = 0$ og $\dot{x}_2 = x_1/L > 0$, så løsningen er på vei oppover, og ellipsene gjennomløpes mot klokka. Det er den samme ringen som gikk rundt i forrige økt, bare i andre koordinater.

- 3 Vi tar utgangspunkt i parametriseringen for enhetssirkelen

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Å justere radien til noe annet enn 1 er bare å gange hele greia med radien, og sentrum flytter vi ved å legge til en konstant vektor. Sirklene har likninger

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad \text{og} \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

så parametriseringene blir

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

og

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3} \cos \theta \\ 2 + \sqrt{3} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- 4 Nok en gang bygger vi videre på gamle ting, og innser raskt at

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}$$

passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

5 En ellipse har parametrisering

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix},$$

så hvis vi setter sammen

$$y(\theta) = R(\alpha)x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix},$$

så er vi der. For $\alpha = \pi/4$ får vi

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \cos \theta + b \sin \theta \end{pmatrix}.$$

6 For sirkelen med radius 2 er

$$\dot{x}(\theta) = 2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |\dot{x}(\theta)| = 2,$$

og for den med radius $\sqrt{3}$ blir banefarten på samme vis $\sqrt{3}$ - konstant fart, som seg hør og bør på en sirkel. For ellipsen er

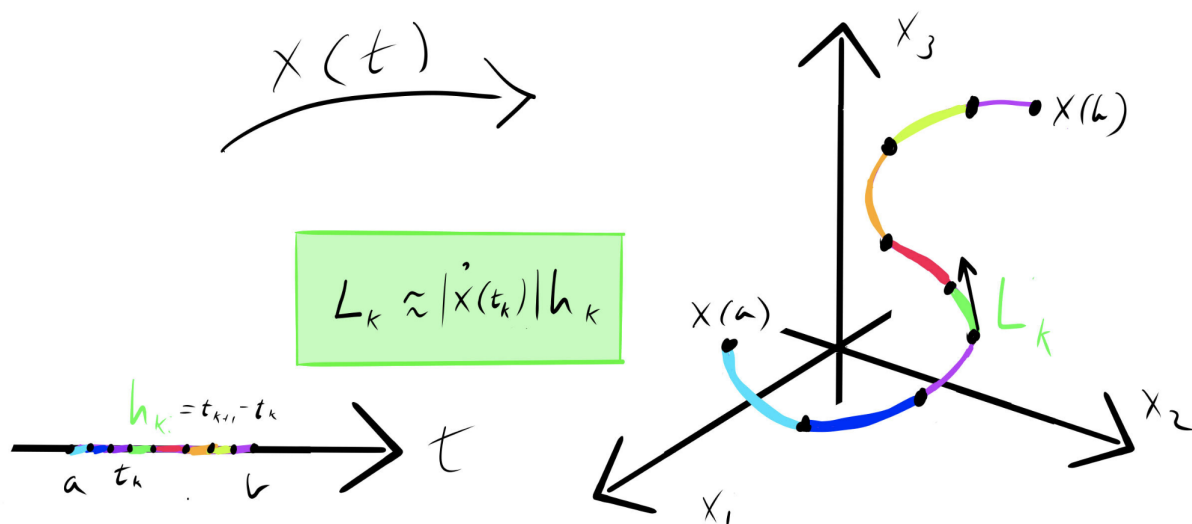
$$\dot{x}(\theta) = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |\dot{x}(\theta)| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

så på ellipsen varierer farten: størst der kurven er slakkest og minst i de spisse endene. Den roterte ellipsen har tangent $\dot{y}(\theta) = R(\pi/4)\dot{x}(\theta)$ og nøyaktig samme banefart - rotasjonsmatrisen er ortogonal, og i forrige økt viste vi at ortogonale matriser ikke endrer lengder.

7 Formelen

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt$$

er en definisjon, og den kan motiveres på flere måter. Steg én er å ta en titt på denne figuren:



Her er intervallet $[a, b]$ på t -aksen partisjonert i n korte linjestykker med lengde h_k . De korresponderende krumme lengdene i x -koordinatsystemet heter L_k , se fargekodene. Buelengden er

$$\sum_{k=0}^n L_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\dot{x}(t_k)| h_k,$$

og vi har god tro på at uttrykket på høyre side blir en bedre approksimasjon etter hvert som partisjonen gjøres finere. Men uttrykket til høyre er en venstre riemannsum for funksjonen $|\dot{x}(t)|$, så når partisjonen blir finere, går denne summen mot

$$\int_a^b |\dot{x}(t)| dt.$$

Funksjonen $x : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2 \arctan t \end{pmatrix}$$

er spesielt designet til NTH av en ekspert på å konstruere parametriserte kurver man kan beregne buelengden til. Vi finner først tangenten

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+t^2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

og buelengden

$$\int_0^2 |\dot{x}(t)| dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 \sinh^{-1}(2) = 2 \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 2.887.$$

8 Vi finner tangenten:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

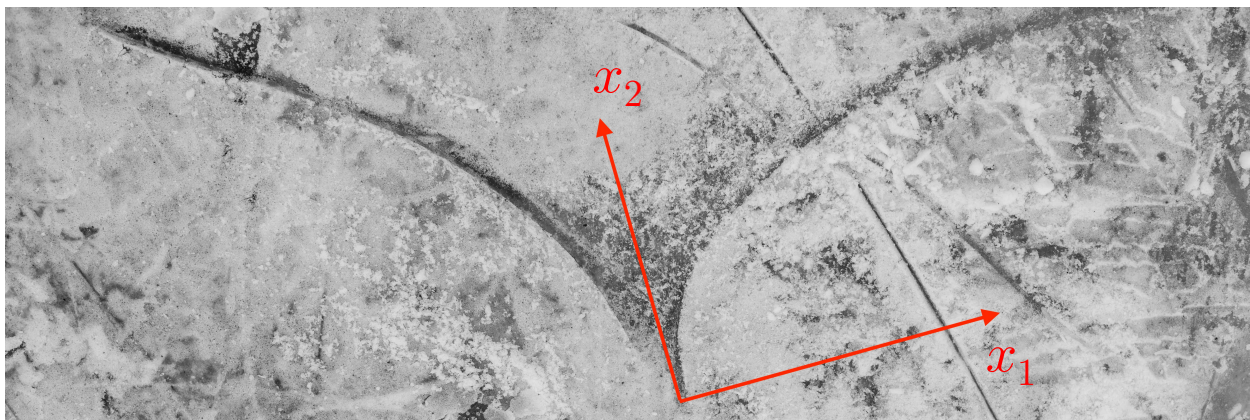
og buelengden:

$$\int_a^b |\dot{x}(t)| dt = \sqrt{2} \int_a^b dt = \sqrt{2}(b-a).$$

For buelengdeparametrisering må vi ha et startpunkt, så la oss sette $a = 0$ og $b = t$. Buelengden er i så fall $s = \sqrt{2}t$, så om vi setter inn $t = s/\sqrt{2}$ i den opprinnelige parametriseringen, får vi buelengdeparametriseringen

$$x(s) = \begin{pmatrix} \cos(s/\sqrt{2}) \\ \sin(s/\sqrt{2}) \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- 9 Den ser faktisk omtrent sånn ut. Ihvertfall nesten. Om jeg skulle tegna den i forelesning, ville det ikke blitt mer nøyaktig.



- 10 Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

og enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2/|t| \\ 2t/|t| \end{pmatrix}.$$

La oss se på hva disse tingene blir når $t \rightarrow 0$. Det er lett å se at

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{|t|} = 0,$$

men

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} = -1,$$

slik at

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Går du inn mot origo på den negative siden av $t = 0$, peker enhetstangenten rett ned, men går du utover fra origo på den positive siden, peker den plutselig rett opp istedet. Den snur momentant 180 grader i $t = 0$ fordi kurven stopper opp og begynner å kjøre motsatt vei.

- 11 Denne ser ut som parabelen $x_2 = x_1^2$ - bare plott i python og se. Banefarten er null i origo her også, men enhetstangenten går mot $(1, 0)^T$ fra begge sider, så kurven er glatt. Betingelsen $|\dot{x}(t)| \neq 0$ er tilstrekkelig, ikke nødvendig.
- 12 Noen har skøytet inn mot punktet, bremsset helt opp og satt fart i en ny retning. I vendepunktet var banefarten null, og da kan sporet få en kusp - akkurat som kurven i oppgave 9. Et skjær i fart klarer bare glatte kurver.

- 13 Nivåkurvene er gitt ved

$$c = x_1 + 2x_2$$

for forskjellige verdier av c . Dette er parallelle rette linjer med normalvektor $(1, 2)$.

- 14 Nivåkurvene er ellipsene

$$4x_1^2 + 5x_2^2 = c$$

med halvakser $\sqrt{c}/2$ langs x_1 -aksen og $\sqrt{c/5}$ langs x_2 -aksen, for $c > 0$. For $c = 0$ består nivåkurven bare av origo, og for $c < 0$ er den tom.

- 15 Vi fullfører kvadratene:

$$4x_1^2 + 8x_1 + 5x_2^2 - 10x_2 + 9 = 4(x_1 + 1)^2 + 5(x_2 - 1)^2.$$

Det er de samme ellipsene som i forrige oppgave, bare med sentrum i $(-1, 1)$.

- 16 Isotermene $pV = c$ er hyperbler i første kvadrant.

- 17 Lavtrykkssenteret ligger rett utenfor Trøndelagskysten, og Steinkjer ligger omtrent på den innerste isobaren: om lag 975 hPa.

- 18 Vi deriverer med hensyn på en variabel av gangen:

$$\partial_{x_1} f = 2x_1 + x_2 + 1 \quad \text{og} \quad \partial_{x_2} f = x_1 + 2x_2 + 1.$$

- 19

$$\partial_p T = V \quad \text{og} \quad \partial_V T = p.$$

- 20 Vi setter g inn i f og får den envariable funksjonen

$$f(g(s)) = a(x_1 + s \cos \theta) + b(x_2 + s \sin \theta) + c$$

så kjerneregelen du lærte på skolen gir oss at vi får indreproduktet mellom gradienten og retningen:

$$\frac{d}{ds} f(g(s)) = a \cos \theta + b \sin \theta = (a, b) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Tenk på retningen $(\cos \theta, \sin \theta)^T$ som en dimensjonsløs ting du ganger med s for å få en vektor i $\mathbb{R}^2$.

- 21

$$\partial_x f = (2x_1 + x_2 + 1, x_1 + 2x_2 + 1) \quad \text{og} \quad (\partial_p T, \partial_V T) = (V, p).$$

- 22 Gradienten i punktet er

$$\partial_x f(1, 2) = (5, 6).$$

Nordvest er retningen

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så stigningen er

$$\partial_x f(1, 2) e = \frac{-5 + 6}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- 23] Langs en nivåkurve er høyden konstant, så den retningsderivate i kurvens tangentretning er null:

$$\partial_x f e = 0$$

for enhetstangenten e . Skalarproduktet er null nøyaktig når vektorene står vinkelrett på hverandre, så gradienten står normalt på nivåkurven. Rett utfor er motsatt av rett oppover: du peker skiene motsatt av gradienten, og stigningen er $-|\partial_x f|$.

- 24] Fra tegningen leser vi at grunnflaten Ω er kvartellipsen med halvaksler 4 og 3 i første kvadrant, med den rette veggen Γ_1 langs x_1 -aksen, den rette veggen Γ_2 langs x_2 -aksen og den krumme veggen Γ_3 langs ellipsebuen. Langs begge aksene er taket $f(x) = x_1 x_2 = 0$, så de rette veggene koster ingenting - all veggen sitter i Γ_3 . Vi parametriserer buen med

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4 \cos \theta \\ 3 \sin \theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

som har banefart $|\dot{x}(\theta)| = \sqrt{16 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta}$, og får

$$\int_{\Gamma_3} f ds = \int_0^{\pi/2} 12 \cos \theta \sin \theta \sqrt{16 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta} d\theta.$$

Substitusjonen $u = 16 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta = 9 + 7 \sin^2 \theta$ gir $du = 14 \sin \theta \cos \theta d\theta$, så

$$\int_{\Gamma_3} f ds = \frac{6}{7} \int_9^{16} \sqrt{u} du = \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} (16^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{4}{7} (64 - 27) = \frac{148}{7} \approx 21.1.$$

Du får bestille litt over tjueen kvadratmeter polykarbonat.

- 25] Brugdens trajektorie Γ er parametrisert ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

der $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$. Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x(t)) |\dot{x}(t)| dt \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (1 + \cos t \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2\pi} 2 + \sin(2t) dt = \frac{1}{2} (3\pi - 1). \end{aligned}$$

Brugden spiser altså $\frac{1}{2}(3\pi - 1)$ plankton på sin tur fra x_2 -aksen til x_1 -aksen. Ordet "plankton" er avledet fra det greske ordet for "å drive", så plankton er en fellesbetegnelse for levende ting i havet som ikke kan svømme horisontalt. Noen typer plankton kan svømme vertikalt, og det er mye som er plankton som man ikke tenker på som plankton.¹

- 26 Vi må først parametrisere den rette linjen. Dette kan gjøres på mange måter, men for eksempel $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Linjeintegralet blir

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_0^1 (1 + (1-t)t) \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

- 27 Vi kan prøve $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Denne kurven reiser også fra $(1, 0)^T$ til $(0, 1)^T$, men med varierende fart (først sakte og så fortere). Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^1 (1 + (1-t^2)t^2) \sqrt{(-2t)^2 + (2t)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 (1 + t^2 - t^4) 2\sqrt{2}t \, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

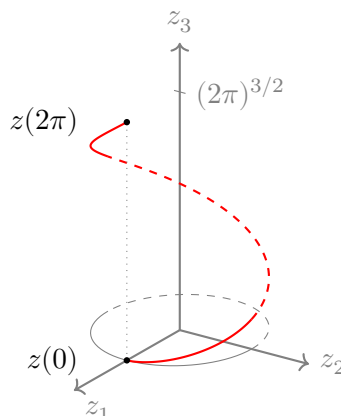
- 28 Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^{4\pi} -(-t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} t \, dt = 8\pi^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Kurven ligger over enhetssirkelen og går én gang rundt, men høyden $z = t^{3/2}$ vokser stadig raskere med t , så det er en skrue som strekker seg litt etterhvert som den blir høyere (dette er ikke så lett å se i korrekt perspektiv):

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Plankton>



Lengden finner vi ved å beregne fartsvektoren

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

og banefarten

$$|\dot{z}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{4}t} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

og integrerer

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2} \right)_0^{2\pi} = \frac{8}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{2}\pi\right)^{3/2} - 1 \right)$$

2 Ganger vi ut, er

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2,$$

så gradienten er

$$\partial_x f(x) = (2x_1 + x_2 - 3, x_1 + 2x_2 - 3) \quad \text{og} \quad \partial_x f(0) = (-3, -3).$$

Brattest stigning er i gradientens retning, altså sørvest langs enhetsvektoren

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og der er stigningen $|\partial_x f(0)| = 3\sqrt{2}$. Retningen $(1, 2)^T$ har enhetsvektor $(1, 2)^T/\sqrt{5}$, så den retningsderiverte blir

$$\partial_x f(0) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-3-6}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{5}} \approx -4.02.$$

Det går nedover, siden $(1, 2)^T$ peker nesten motsatt av gradienten.

3 Tangenten og banefarten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4} = \sqrt{5},$$

så enhetstangentvektoren er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Enhetsnormalvektoren er den normaliserte deriverte av T - siden $|T| = 1$ er $\dot{T} \perp T$, og $\dot{T}$ peker dit kurven svinger:

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{|\dot{T}(t)|} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normalen peker horisontalt rett inn mot x_3 -aksen, som den må for en heliks: fluen svinger hele tiden inn mot aksene den skrur seg rundt, mens stigningen 2 er konstant og ikke bidrar til svingen. $|\dot{T}| = 1/\sqrt{5}$ delt på banefarten $\sqrt{5}$ gir krumningen $1/5$.

- 4 Sett $E(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}(t)^2 + x(t)^2)$ og deriver med kjerneregelen:

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = 0$$

langs enhver løsning, så E er konstant. Dette er oppgave 1 med $C = L = 1$: $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ er kinetisk energi og $\frac{1}{2}x^2$ er fjærene energi, og løsningene går i sirkler i $(x, \dot{x})$ -planet. Med masse m og fjærstivhet k gir samme regning at $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ er bevart.