

5 - OM KART OG KOMPASS OG TRYKK OG TEMPERATUR

De første fire radene i tabellen i forrige økt er funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ og kalles **skalarfelt**, siden den uavhengige variabelen er en skalar. Funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ har vi vært borti i TMA4106:

- gjennom bølge- og varmelikningen, der løsningen $u(x, t)$ var henholdsvis utslaget til en streng, spenningen på en kraftlinje, eller temperaturen i en stang.
- som et terreng der (x_1, x_2) er gps-koordinatene og funksjonsverdien $f(x_1, x_2)$ angir høyden over havet.

Nivåkurvene¹ til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er kurver i x -planet der funksjonshøyden er konstant - dette ekvivalenslinjene på orienteringskartet. **Gradientvektoren**² er en vektor med de partiellderiverte til f . Evaluerer denne i et punkt i x -planet, får du

1 stigningen i koordinatretningene og

2 den retningen i x -planet der stigningen er brattest.

Dersom du vil ha stigningen i en bestemt retning, prikker du gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen; dette kalles **retningsderivert**.³ Tenk retningen til skiene på skitur.⁴ Et **kritisk punkt** er et punkt der gradientvektoren er null. Her er den retningsderiverte lik null uansett hvilken retning du peker skiene, og dersom terrenget er deriverbart er det her du finner toppen av fjellet eller bunnen av dalen eller sadelpunktet på fjellryggen.

0 La $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$. Finn nivåkurvene, gradientvektoren og alle kritiske punkter.

I dette semesteret skal vi håndtere inn- og utvariable på en mer systematisk måte. La oss først finne den retningsderiverte når grafen til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er plan. La $f(x) = ax_1 + bx_2 + c$ og la oss sette

$$g(s) = \begin{pmatrix} x_1 + s \cos \theta \\ x_2 + s \sin \theta \end{pmatrix}.$$

1 Finn stigningen ut fra x med hensyn på s i retningen indikert av θ .



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Level_set

²<https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

⁴Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tøys og tull. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse:
<https://snl.no/ski>
<https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/>
<https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/>

Oppgaven over henter om hvordan vi skal håndtere matrisedimensjoner på inn- og utvariable. Den uavhengige variabelen x er søylevektor, og vi setter opp de n komponentene til $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ i en søylevektor slik:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

og de mn partiellderiverte til f organiseres i **jacobimatrisen**:⁵

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Dette gjør vi for at alt skal passe med vanene vi har fra matrise-vektorproduktet, som er en av de viktigste funksjonene fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$.

- 2 Et av de aller enkleste skalarfeltene er den lineære funksjonen

$$f(x) = \beta^T x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

der β og x er vektorer i $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Hva er jacobimatrisen?

- 3 Vi kjenner godt $f(x) = Ax$, der $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Hva er $f'(x)$?

En gang i forbindelse med en eksamen, måtte jeg finne på noen meningsløse funksjoner. Jeg trodde jeg skulle krepere av kjedsomhet, men det var nødvendig for å teste om studentene hadde forstått jacobimatrisen.

- 4 La $x \in \mathbb{R}^2$ og $z \in \mathbb{R}^3$ og

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad g(z) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}.$$

Finn jacobimatrissene til f og g .

En av arbeidshestene dette semesteret er **kjernerregelen**.⁶ Beviset er for teknisk for dette kurset, men med matrisemultiplikasjon blir regneregelen veldig enkel å skrive opp. La $x \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, og la $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ være komposisjonen av f og g :

$$h(x) = g(f(x))$$

Da er $h'(x)$ gitt ved matriseproduktet

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

- 5 La f og g være funksjonene i oppgaven over. Finn jacobimatrissene til $f(g(z))$ og $g(f(x))$.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Chain_rule

Det finnes et eget symbol for den transponerte av jacobimatrisen, nemlig **nablaoperatoren**⁷

$$\nabla f(x) = (f'(x))^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T.$$

Det er nemlig nyttig å kunne skrive gradienten som en søyle, og vi skriver $\nabla^T f = f'$.

6 Skriv opp kjerneregelen med nabla istedet for derivasjonsapostrofen.

Det er lurt å studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ ganske grundig. En funksjon vi skal få bruk for dette semesteret, er den kvadratiske funksjonen $f(x) = x^T A x$ der $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

7 Finn f' og ∇f .

Den generelle lineære regresjonsmodellen⁸ skrives

$$Y = X\beta + \epsilon$$

der X er forklaringsvariabelen, Y er responsvariabelen, β er regresjonsparametrene som skal estimeres og ϵ usikkerheten. I TMA4106 så vi på hvordan normallikningene

$$X^T y = X^T X \beta$$

løses for å finne β når $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ og $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ er datamatriser.

8 Normallikningene dukker opp fordi vi leter etter minimumspunktet til

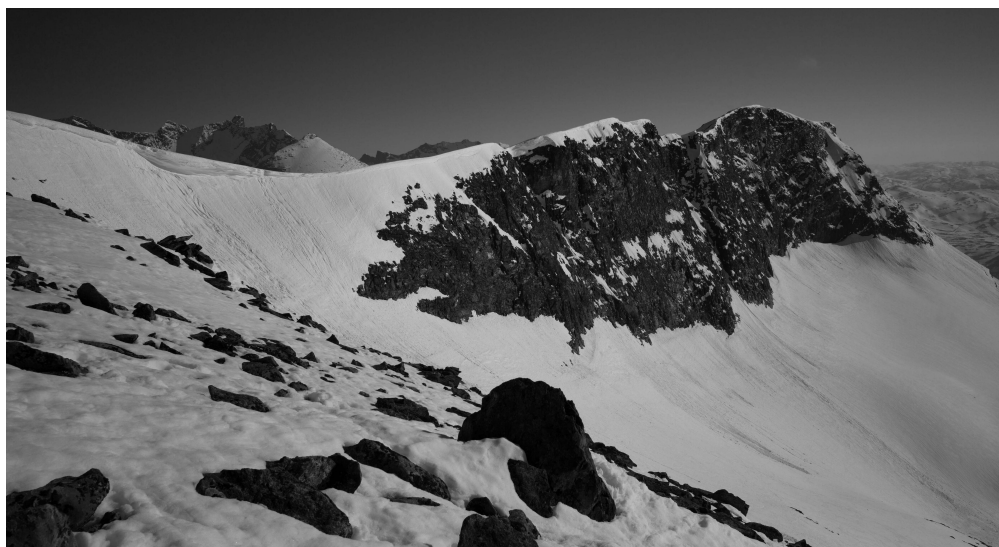
$$f(\beta) = (y - X\beta)^T (y - X\beta).$$

Utled dem ved å sette gradienten til f lik null.

Den ideelle gasslov $T = pV/Nk$ er et naturlig eksempel på en kvadratisk funksjon:

$$f(x) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0.$$

9 Når er det et entydig kritisk punkt? Topp eller bunn? Hva er a -koeffisientene i $T = pV/Nk$?



⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Del>

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/General_linear_model

Tangentplanet⁹ til f i x er analogt til tangentlinjen du lærte på skolen og gitt ved formelen

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

der $s \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Formelen er like bra for $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- 10 Finn tangentplanene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \quad \text{og} \quad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

i punktet $(1, 1)^T$. Tangentplanenes nullnivåkurver skjærer hverandre i ett punkt. Hvilket?

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte **kjeglesnittene**.¹⁰ Din daglige rutine er faktisk å reise rundt på en slik - jordens bane rundt solen er sånn omtrent en ellipse.

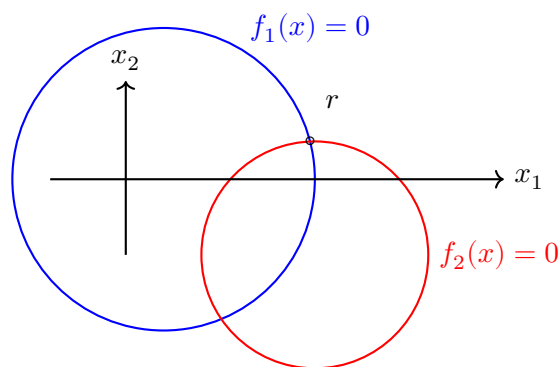
- 11 Skisser nivåkurvene til funksjonene i forrige oppgave.

Har du skjønnet tangentplanene, har du i prinsippet alt som trengs for å forstå **Newtons metode**¹¹

$$x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k)$$

for løsning av det ikkelineære likningssettet

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Her betyr x_k iterasjon k , altså en vektor i $\mathbb{R}^{2 \times 1}$.

- 13 Utled fra rekursjonen fra tangentplanformelen i forrige økt.

- 14 I oppgave 9 i økt 3-2 regnet du faktisk ut et newtonsteg fra initialgjetningen $x_0 = (1, 1)^T$ når du fant skjæringspunktet mellom nullnivåkurvene til tangentplanene. Finn skjæringspunktene mellom sirklene numerisk.

- 15 Finn skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{og} \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 = 1.$$



⁹<https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent#Plane>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method#Multidimensional_formulations

Dersom f har tre uavhengige variable er det best å tenke tetthet, temperatur eller trykk i rommet. Vi får nivåflater istedet for nivåkurver.

- 16 Et stearinlys står og brenner i origo. La oss anta at temperaturen i rommet er gitt ved

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

der $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Finn gradienten til u . Hvilken retning peker den? Hvordan ser nivåflatene ut?

En av grunnene til at vi tenker på x som en kolonne og ikke en rad er at vi ønsker at den lineære funksjonen $f(x) = Ax$ skal ha matrisedimensjonene vi er vant til. En annen grunn er at vi tenker på en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ som en kolonne og ikke en rad og vi ønsker ofte å sette en slik inn i et skalarfelt.

- 17 En flue flyr langs den sirkulære heliksen fra oppgave oppgave 11 i forrige økt og temperaturen er gitt ved u over. Hva er fluens opplevde temperaturforandring som funksjon av tiden?

Dersom f er et skalarfelt med n uavhengige variable, skriver vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$$

for den dobbelderiverte til f med hensyn på først x_l og så x_k .

- 18 Finn de dobbelderiverte til u over. Hvor mange er det?

Likningen

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = 0$$

kalles **laplaces likning** og funksjoner som passer i den kalles **harmoniske funksjoner**. Disse dukker opp overalt i fysikk.¹²

- 19 Er u i oppgave 11 en harmonisk funksjon?

Det er for øvrig lett å produsere harmoniske funksjoner av to variable - bare splitt en deriverbar funksjon av en kompleks variabel i real- og imaginærdel og så har du en.

- 20 Vis at disse er harmoniske dersom du antar at du kan derivere dem fritt.



¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function

Akkurat som det finnes en forvirrende palett av funksjonstyper fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ finnes det en forvirrende palett av integraler å stappe dem inn i. Husk at buelengden til kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er

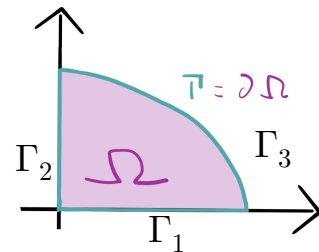
$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |x'(t)| dt.$$

La f være et skalarfelt. Det enkleste flervariabel integralet kalles **linjeintegralet til f over Γ** , og dersom Γ er parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, er det gitt som

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(x(t)) |x'(t)| dt.$$

Integralet kan tolkes på mange måter, men i begynnelsen bør du tenke på det som arealet til en husvegg der f er taket og Γ er husveggen slik den er tegnet i husets arealtegning.

- 1 Du har tenkt å bygge en stilig grillhytte med grunnflate Ω . Du har kjøpt gassgrill og vil derfor ha tak formet som den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$. Du skal bestille panel og polykarbonat til veggene, og trenger derfor å regne ut veggens totale areal. Finn arealet.



Det er vanlig å kreve at x tegner Γ på monotont vis, for ellers blir arealet feil - parametriseringen x får ikke lov til å stoppe opp, snu og kjøre tilbake eller noe sånt.

- 2 Hvordan får man til det? (Hint: Teksten mellom oppgave 13 og 14 i økt 3-1.)



En alternativ tolkning av er at du har en brugde eller en djevlerokke som beiter pelagisk og svømmer langs kurven Γ . Dersom planktontettheten er gitt ved f , blir linjeintegralet brugdens totale måltid.

- 3 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Brugden svømmer én gang fra x_2 -aksen til x_1 -aksen mot klokken. Hvor mye spiser den?

- 4 Brugden svømmer så fra x_1 -aksen tilbake til x_2 -aksen langs den rette linjen $x_1 + x_2 = 1$. Planktontettheten er den samme. Hvor mye spiser den på denne turen?



Foto: Greg Skomal

Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven Γ , får linjeintegralet over Γ den samme verdien. Dette følger av kjerneregelen.

- 5 Den rette linjen i oppgaven over kan parametriseres på mange forskjellige måter. Regn ut integralet med to forskjellige parametriseringer og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den vanligste måten å introdusere linjeintegraler på, er å si at $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er massetetthet målt i kilo per meter og at Γ er en tråd med massetetthet f . Da blir linjeintegralet til f over Γ trådens totale masse. Denne tolkningen er litt teit, for om en tråd har varierende tetthet (tenk for eksempel på en gitarstreng spunnet med kobbertråd), er det ingen som tenker på denne tettheten som en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. La oss heller ta en brugdeoppgave til.

- 6 Det er dårlige tider i overflaten, og brugden må nedover i vannsøylen. Planktontettheten øker lineært med dybden og er gitt ved $f(x) = -x_3$, og brugden svømmer langs den sirkulære heliksen $x : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Hvor mye spiser brugden på denne turen?¹³



¹³Det sies at steinbiten (https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_wolffish) ikke kan svømme rett oppover, men er nødt til å følge en sirkulær heliks om den skal opp i vannsøylen. Jeg vet ikke om dette er sant, men på fridykkerkurs lærer de visst at om man ertter på deg en steinbit er det bare å svømme rett opp. Send meg en epost om du har ertet på deg en steinbit noen gang.