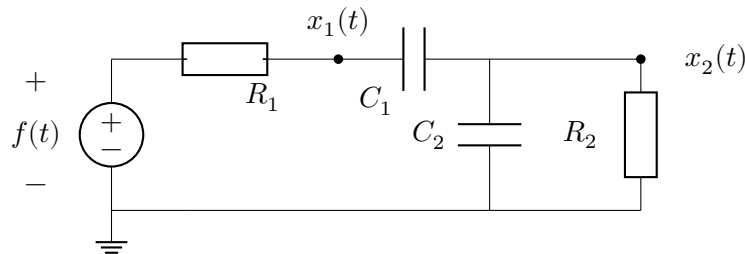


5 - ROTASJON - LF



- 1 Vi setter på sløyfestrømmer: i_1 går gjennom R_1 og C_1 , i_2 går gjennom R_2 , og kondensatoren C_2 ser differansen. Kirchhoffs spenningslov rundt de to sløyfene gir

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \int i_1(t) - i_2(t) dt = f(t)$$

$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) - i_1(t) dt = 0.$$

Så kobler vi strømmene til spenningene. Den andre sløyfelikningen sier at C_2 og R_2 deler spenning, og det er denne spenningen som er x_2 :

$$x_2(t) = R_2 i_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_1(t) - i_2(t) dt.$$

(Pass på fortegnene her. Med i_2 regnet nedover gjennom R_2 er $x_2 = +R_2 i_2$, og da må integranden være $i_1 - i_2$ - det er netto strøm *inn* på kondensatoren som lader den opp. Skriver man $-R_2 i_2$ og $i_2 - i_1$, går det galt to steder på en gang, og feilene skjuler hverandre helt til svaret skal brukes.) Nodespenningen x_1 ligger én kondensator lenger opp, og det er C_1 som ligger mellom dem:

$$x_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt.$$

Nå kan vi kvitte oss med strømmene. Setter vi de to siste relasjonene inn i den første sløyfelikningen, kollapser den til

$$R_1 i_1(t) + x_1(t) = f(t) \quad \text{altså} \quad i_1(t) = \frac{f(t) - x_1(t)}{R_1},$$

og den andre gir

$$i_2(t) = \frac{x_2(t)}{R_2}.$$

Deriverer vi kondensatorrelasjonene, står det

$$\dot{x}_2 = \frac{i_1 - i_2}{C_2} \quad \text{og} \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \frac{i_1}{C_1},$$

og setter vi inn strømmene, er systemet der:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2}\right)x_1 - \frac{1}{R_2 C_2}x_2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2}\right)f \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_1 C_2}x_1 - \frac{1}{R_2 C_2}x_2 + \frac{1}{R_1 C_2}f,\end{aligned}$$

eller på matriseform:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \end{pmatrix} f.$$

Til slutt en kontroll som ikke koster noe. Sett f konstant og la systemet finne roen, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Trekker vi den andre likningen fra den første, står det $0 = \frac{f-x_1}{R_1 C_1}$, altså $x_1 = f$, og da gir den andre likningen $x_2 = 0$. Det er båndpassfilteret i ett øyeblikksbilde: ved likespenning lader C_1 seg helt opp, strømmen stopper, og utgangen ligger død. Signalet må bevege seg for å slippe gjennom.

- 2 La i gå ut av plusspolen på kondensatoren og gjennom spolen. Kondensatoren tappes av strømmen,

$$C\dot{x} = -i,$$

og spenningen x ligger over spolen og driver strømmen,

$$L\frac{di}{dt} = x.$$

Deriverer vi den første likningen og setter inn den andre, forsvinner strømmen:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{C}\frac{di}{dt} = -\frac{x}{LC}.$$

Med x og $\dot{x}$ som variabler er dette systemet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Første rad sier bare at $\dot{x}$ er den deriverte av x . All fysikken bor i andre rad.

- 3 Med $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 I.$$

Dermed er $A^3 = -\omega_0^2 A$, $A^4 = \omega_0^4 I$, og så videre - potensene går i ring. Vi setter inn i eksponensialrekken og sorterer leddene etter om de lander på I eller A :

$$\begin{aligned}e^{At} &= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} + \frac{(\omega_0 t)^4}{4!} - \dots\right) I + \frac{1}{\omega_0} \left(\omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{3!} + \dots\right) A \\ &= I \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Løsningen er dermed

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \dot{x}(0) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0},$$

en ren svingning med frekvens $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

- 4 Vi følger hintet. Prosjeksjonen av x på y er

$$z = y(y^T x),$$

og rotasjonen lar den stå i fred. Resten, $x - z$, ligger i planet vinkelrett på y , og det er der alt skjer. Vi lager en ortonormal basis for dette planet:

$$u_1 = \frac{x - z}{\|x - z\|} \quad \text{og} \quad u_2 = y \times u_1.$$

Sjekk gjerne at u_2 duger: den står vinkelrett på både y og u_1 , og siden y og u_1 er ortonormale er $\|u_2\| = \|y\| \|u_1\| \sin 90^\circ = 1$. Basisen (u_1, u_2) er dessuten orientert slik at en positiv vinkel om y går fra u_1 mot u_2 - det er høyrehåndsregelen. I dette planet er rotasjonen den todimensjonale vi kjenner: komponenten $\|x - z\| u_1$ roteres til

$$\|x - z\| (u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta).$$

Nå setter vi sammen igjen:

$$\begin{aligned} v &= z + \|x - z\| \cos \theta u_1 + \|x - z\| \sin \theta u_2 \\ &= z + \cos \theta (x - z) + \sin \theta y \times (x - z) \\ &= z + \cos \theta (x - z) + \sin \theta y \times x, \end{aligned}$$

der vi i siste steg brukte at $y \times z = 0$, siden z ligger langs y . Rydder vi opp og setter inn $z = y(y^T x)$, står formelen der:

$$v = x \cos \theta + y \times x \sin \theta + y(y^T x)(1 - \cos \theta).$$

Les gjerne formelen en gang til med figuren i bakhodet. Første ledd er x skrudd ned med $\cos \theta$, andre ledd er bidraget vinkelrett på både aksene og x , og tredje ledd fyller på langs aksene igjen, for den delen av x skal ikke skrues ned i det hele tatt.

- 5 Vi skriver ut kryssproduktet komponentvis,

$$y \times x = \begin{pmatrix} y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ y_3 x_1 - y_1 x_3 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 \end{pmatrix},$$

og leser av matrisen kolonne for kolonne:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Legg merke til at $S^T = -S$. Matrisen er skjevsymmetrisk, og det er ikke en kuriositet - det er selve inngangsbilletten til resten av økten.

- 6 Vi trenger å vite hva S og S^2 gjør med en vektor. Det første er definisjonen:

$$Sx = y \times x.$$

Det andre er BAC-CAB-regelen $a \times (b \times c) = b(a^T c) - c(a^T b)$, som med $\|y\| = 1$ gir

$$S^2 x = y \times (y \times x) = y(y^T x) - x(y^T y) = y(y^T x) - x.$$

Nå er det bare å gange ut:

$$\begin{aligned} Rx &= x + \sin \theta Sx + (1 - \cos \theta) S^2 x \\ &= x + \sin \theta y \times x + (1 - \cos \theta) (y(y^T x) - x) \\ &= x \cos \theta + y \times x \sin \theta + y(x^T y)(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

som er nøyaktig Rodrigues' formel fra oppgave 4. Formelen og matrisen sier det samme, men matrisen kan lagres, deriveres og ganges sammen, og det er slik roboter og spillmotorer faktisk roterer ting.

- 7 Først en liten observasjon som gjør hele regningen:

$$S^3 x = y \times (y(y^T x) - x) = -y \times x = -Sx,$$

siden $y \times y = 0$. Altså er

$$S^3 = -S \quad \implies \quad S^4 = -S^2, \quad S^5 = S, \quad S^6 = S^2, \quad \dots$$

Potensene går i ring, akkurat som potensene til i , og det er ingen tilfeldighet - S er en tredimensjonal slektning av å gange med i . Vi setter inn i eksponensialrekken og sorterer leddene etter om de lander på S eller S^2 :

$$\begin{aligned} e^{\theta S} &= I + \theta S + \frac{\theta^2}{2!} S^2 + \frac{\theta^3}{3!} S^3 + \frac{\theta^4}{4!} S^4 + \frac{\theta^5}{5!} S^5 + \dots \\ &= I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) S + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) S^2 \\ &= I + S \sin \theta + S^2 (1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

der vi kjente igjen sinusrekken, og cosinusrekken så nær konstantleddet: $\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots = 1 - \cos \theta$. Dette er løftet fra første side, innfridd. Rotasjonen om y er matriseeksponensialfunksjonen av den skjevsymmetriske matrisen $\theta S(y)$, og differensiallikningen $\dot{x} = S(y)x$ gjør ikke annet enn å skru x rundt aksene med konstant fart. Systemet hverken vokser eller dør. Det bare går rundt.

- 8 Rekkefølgen spiller en rolle her. Oppføring (i, j) i $A^T A$ er indreproduktet av kolonne i og kolonne j , og kolonnene i A står vinkelrett på hverandre, så alt utenfor diagonalen forsvinner:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(AA^T er derimot ikke diagonal - radene i A er ikke ortogonale. Regn etter.) Diagonale matriser er gratis å invertere, så vi ganger med $(A^T A)^{-1}$ fra venstre og leser av

$$A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Den inverse er nesten bare transponeringen - det eneste som mangler er en skalering av radene. For den skalerte matrisen B mangler ingenting: kolonnene er ortonormale, $B^T B = B B^T = I$, og $B^{-1} = B^T$.

- 9 Nei. B er ortogonal - det viste vi i forrige oppgave - men determinanten er -1 . Ortogonale matriser roterer og speiler vektorer, og mengden av alle ortogonale $n \times n$ -matriser kalles den **ortogonale gruppen**¹ $O(n)$. Dersom determinanten er 1 er det ren rotasjon, og mengden av disse kalles **den spesielle ortogonale gruppen** $SO(n)$.² Dette er akkurat liegruppene fra oppgavearket: $e^{\theta S(y)}$ ligger i $SO(3)$ for alle θ og alle enhetsvektorer y , og omvendt kan enhver rotasjon i $\mathbb{R}^3$ skrives slik. Matrisen B ligger i $O(3)$, men ikke i $SO(3)$. Den roterer ikke. Den speiler. Forskjellen på å rotere og å speile kan du kjenne på hendene. Uansett hvordan du snur og vender på høyrehånden din, blir den aldri en venstrehånd - men i speilet er den nettopp det. Matrisen C har også ortonormale kolonner - regnestykket er det samme som for B - men determinanten er $+1$. C ligger i $SO(3)$ og er en ekte rotasjon, om aksene $(1, 1, 1 - \sqrt{2})^T$ om du regner etter.

- 10 Siden $S^T = -S$ og $(S^2)^T = S^2$, er transponeringen av Rodrigues' matrise

$$R^T = I - S \sin \theta + S^2(1 - \cos \theta),$$

altså den samme formelen med $-\theta$ satt inn - å transponere er å rotere tilbake. Vi ganger ut:

$$\begin{aligned} R^T R &= (I - S \sin \theta + S^2(1 - \cos \theta))(I + S \sin \theta + S^2(1 - \cos \theta)) \\ &= I + 2S^2(1 - \cos \theta) - S^2 \sin^2 \theta + S^4(1 - \cos \theta)^2, \end{aligned}$$

der leddene med S og S^3 kansellerer i par. Nå bruker vi $S^3 = -S$, som gir $S^4 = -S^2$, og samler alt på S^2 :

$$\begin{aligned} R^T R &= I + S^2(2(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2) \\ &= I + S^2(1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = I. \end{aligned}$$

Rotasjonsmatrisen er ortogonal, og den inverse er gratis: $R^{-1} = R^T$, rotasjonen den andre veien.

- 11 Siden $S^T = -S$, er

$$S S^T = -S^2 = \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1 y_2 & -y_1 y_3 \\ -y_1 y_2 & y_1^2 + y_3^2 & -y_2 y_3 \\ -y_1 y_3 & -y_2 y_3 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} = I - y y^T$$

når $\|y\| = 1$, der siste likhet er BAC-CAB-regelen fra oppgave 6. Dette er projeksjonen på planet vinkelrett på y - matrisen som sender x til $x - z$ i figuren. Rotasjonsmatrisen besto testen i forrige oppgave. S gjør det nesten: transponeringen er ikke inversen, men den bommer bare med retningen langs y .

- 12 Nei. Likningen $Sx = y \times x$ røper hvorfor:

$$Sy = y \times y = 0,$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_matrix

²https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

så S sender en hel retning til null, og den informasjonen kan ingen matrise hente tilbake. Determinanten er null - det gjelder faktisk alle skjevsymmetriske matriser av odde dimensjon, siden

$$\det S = \det S^T = \det(-S) = (-1)^3 \det S.$$

Men en nesten-invers finnes, og vi regnet den ut i forrige oppgave:

$$S(-S) = SS^T = I - yy^T$$

er projeksjonen på planet vinkelrett på y . På det planet - der rotasjonen faktisk skjer - gjør $-S = S^T$ jobben som invers. Dette kalles **pseudoinversen**³ til S .

13 Vi putter basisvektorene inn i $S(y)$ én etter én:

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette er generatorene. Setter du dem inn i $e^{\theta S(y)} = I + S \sin \theta + S^2(1 - \cos \theta)$, faller matrisene i oppgaven ut. For e_3 er for eksempel

$$S^2(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så

$$e^{\theta S(e_3)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aksen står i ro, og i planet vinkelrett på den står den todimensjonale rotasjonsmatrisen fra første side. De to andre er like, bare med sin egen akse i ro. Legg forresten merke til at rekkefølgen spiller en rolle når du setter dem sammen: roll så pitch er ikke det samme som pitch så roll. Generatorene kommuterer ikke, og det er derfor flysimulatorer og roboter må holde tunga rett i munnen.

14 I planet er

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix},$$

en halv omdreining, hverken mer eller mindre. Snu arket opp ned, og hvert punkt har byttet side av origo. I rommet er derimot

$$\det(-I) = (-1)^3 = -1,$$

så $-I$ ligger ikke i $SO(3)$ og er ingen rotasjon. Du kan også se det uten determinanten: en rotasjon i rommet lar en hel akse stå i ro, men $-I$ flytter alle punkter unntatt origo. Generelt er $\det(-I) = (-1)^n$. I partallsdimensjon er speiling gjennom origo en rotasjon. I oddetallsdimensjon er den en ekte speiling.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_inverse

- 15 La Q være ortogonal, og la x og y være to punkter. Avstanden mellom dem etter avbildningen er $\|Qx - Qy\|$, og vi følger hintet:

$$\begin{aligned}\|Qx - Qy\|^2 &= (Q(x - y))^T Q(x - y) \\ &= (x - y)^T Q^T Q (x - y) \\ &= (x - y)^T (x - y) \\ &= \|x - y\|^2,\end{aligned}$$

siden ortonormale kolonner gir $Q^T Q = I$ - det var poenget i oppgave 8. Avstanden mellom to punkter er altså den samme før og etter, og det er hele definisjonen. Stive legemer kan flyttes, roteres og speiles, men aldri strekkes, og derfor er det akkurat disse matrisene fysikken bruker når den flytter på ting.

- 16 En 1×1 -matrise er bare et komplekst tall u , og betingelsen $U^* U = I$ blir

$$\bar{u}u = |u|^2 = 1.$$

Tallene med absoluttverdi 1 er nettopp enhetssirkelen, og hvert av dem kan skrives $u = e^{i\theta}$. Å gange med $e^{i\theta}$ roterer det komplekse planet vinkelen θ om origo, så $U(1)$ er de todimensjonale rotasjonene $SO(2)$ i forkledning - den samme gruppen som drev svingekretsen på første side rundt og rundt.

- 17 Alt følger fra $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ og litt disiplin med rekkefølgen. Gang $ijk = -1$ med k fra høyre:

$$ijk^2 = -k \quad \implies \quad ij = k,$$

og med i fra venstre:

$$i^2 jk = -i \quad \implies \quad jk = i.$$

Så ganger vi $ij = k$ med i fra venstre og j fra høyre:

$$i^2 j = ik \quad \implies \quad ik = -j \quad \quad ij^2 = kj \quad \implies \quad kj = -i,$$

og $jk = i$ med j fra venstre og k fra høyre:

$$j^2 k = ji \quad \implies \quad ji = -k \quad \quad jk^2 = ik \quad \implies \quad ik = -j.$$

Til slutt gir $ji = -k$ ganget med i fra høyre at $ki = j$. Tabellen er nøyaktig kryssproduktet fra gymnasen: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ rundt og rundt med klokka på bokstavene, og minus når du går mot klokka. Høyrehåndsregelen bodde i kvaternionene hele tiden.

- 18 Vi ganger ut og sorterer på $1, i, j$ og k ved hjelp av tabellen fra forrige oppgave:

$$\begin{aligned}zw &= (z_0 w_0 - z_1 w_1 - z_2 w_2 - z_3 w_3) \\ &\quad + (z_0 w_1 + z_1 w_0 + z_2 w_3 - z_3 w_2) i \\ &\quad + (z_0 w_2 + z_2 w_0 + z_3 w_1 - z_1 w_3) j \\ &\quad + (z_0 w_3 + z_3 w_0 + z_1 w_2 - z_2 w_1) k.\end{aligned}$$

Bytter du z og w , overlever alle leddene med to like indekser, mens de blandede leddene bytter fortegn. I kommutatoren dør derfor alt det symmetriske, og det blandede kommer dobbelt:

$$zw - wz = 2(z_2 w_3 - z_3 w_2) i + 2(z_3 w_1 - z_1 w_3) j + 2(z_1 w_2 - z_2 w_1) k.$$

Dette er ingen hvem som helst - det er to ganger kryssproduktet av vektordelene:

$$zw - wz = 2\mathbf{z} \times \mathbf{w}.$$

To kvaternioner kommuterer altså nøyaktig når vektordelene deres er parallelle.

19 La

$$z = z_1 + z_2 i \quad w = w_1 + w_2 i \quad |w| = 1$$

og

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_\perp = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Vi beregner:

$$\begin{aligned} \overline{w}z &= (w_1 - w_2 i)(z_1 + z_2 i) \\ &= w_1 z_1 + w_2 z_2 + (-z_1 w_2 + z_2 w_1)i \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{w} + \mathbf{z}^T \mathbf{w}_\perp i \end{aligned}$$

Realdelen til $\overline{w}z$ er skalarprojeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}$, mens imaginærdelen er skalarprojeksjonen av $\mathbf{z}$ på normalen til $\mathbf{w}$. Hvis du ikke synes dette er vakkert, er du en hard nøtt.

20 Samme regnestykke som i oppgave 18, men med $w = \bar{z}$: alle de blandede leddene kansellerer, og begge produktene blir

$$z\bar{z} = \bar{z}z = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Et reelt tall, og ikke hvilket som helst reelt tall - kvadratet av lengden til z som vektor i $\mathbb{R}^4$.

21 Skriv $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$. Da er

$$zz^{-1} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1 \quad \text{og} \quad z^{-1}z = \frac{\bar{z}z}{|z|^2} = 1,$$

der begge brøkene er forrige oppgave i forkledning. Alle kvaternioner unntatt null har altså en invers - i motsetning til matrisene har $\mathbb{H}$ ingen singulære elementer.

22 Uten skalardeler sier formelen fra oppgave 18 at

$$zw = -(z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3) + (z_2 w_3 - z_3 w_2)i + (z_3 w_1 - z_1 w_3)j + (z_1 w_2 - z_2 w_1)k,$$

og siden $\bar{z} = -z$ for et rent kvaternion, er

$$\bar{z}w = -zw = (z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3) - (z_2 w_3 - z_3 w_2)i - (z_3 w_1 - z_1 w_3)j - (z_1 w_2 - z_2 w_1)k.$$

Skalardelen er prikkproduktet, og vektordelen er minus kryssproduktet. Begge produktene du lærte på gymnasen bor i det samme kvaternionproduktet, og det var slik Hamilton fant dem.

23 Skriv $q = c + sy$, der $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$ og $y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$ er rent med $\|y\| = 1$. Da er

$$|q|^2 = c^2 + s^2 \|y\|^2 = 1,$$

så inversen er gratis: $q^{-1} = \bar{q} = c - sy$, akkurat som i oppgave 21. Vi bretter opp ermene:

$$qxq^{-1} = (c + sy)x(c - sy) = c^2x + cs(yx - xy) - s^2yxy.$$

De to midterste leddene er kommutatoren fra oppgave 18:

$$yx - xy = 2\mathbf{y} \times \mathbf{x}.$$

Det siste leddet tygger vi i to jafs med formelen for rene produkter fra oppgave 22 og BAC-CAB:

$$yxy = \left(-(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \right) y = -(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})y - y \times (y \times x) = x - 2(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})y.$$

Vi samler alt og kjenner igjen de doble vinklene $c^2 - s^2 = \cos \theta$, $2cs = \sin \theta$ og $2s^2 = 1 - \cos \theta$:

$$\begin{aligned} qxq^{-1} &= c^2x + 2cs\mathbf{y} \times \mathbf{x} - s^2x + 2s^2(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})y \\ &= x \cos \theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin \theta + y(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Dette er Rodrigues' formel fra oppgave 4, uten en eneste matrise. Resultatet er rent, så imaginærdelene er hele svaret. Fire tall og to halvvinkler - det er alt roboten trenger å huske om en rotasjon.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Sett $\omega = e^{2\pi i/3}$. Da er $\omega^3 = 1$, så $e^{4\pi i/3} = \omega^2$ og $e^{8\pi i/3} = \omega^4 = \omega$, og $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \omega^2$. Matrisen er

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \quad F^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix},$$

siden F er symmetrisk, så adjungering er bare konjugering. Element (j, k) i F^*F er

$$\frac{1}{3} \sum_{m=0}^2 \overline{\omega^{mj}} \omega^{mk} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^2 \omega^{m(k-j)},$$

som er 1 når $j = k$, og ellers $\frac{1}{3}(1 + \omega + \omega^2) = 0$, fordi de tre tredjerøttene til 1 summerer til null: $1 + \omega + \omega^2 = (1 - \omega^3)/(1 - \omega) = 0$. Altså er $F^*F = I$. Dette er den diskrete fouriermatrisen for tre punkter - kolonnene er de tre "frekvensene" $e^{2\pi i n k/3}$ du kan ha på tre punkter, og at den er unitær er koeffisientformelen og Parsevals teorem fra økt 4 i miniatyr.

- 2 A er symmetrisk med egenverdier 3 og 1 og egenvektorer $(1, 1)^T$ og $(1, -1)^T$, så

$$A = V D V^T \quad \text{med} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siden $A^n = V D^n V^T$, blir $e^A = V e^D V^T$:

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{2} \begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Svd-faktoriseringen $A = U \Sigma V^T$ har V lik egenvektorene til $A^T A = A^2$, altså samme V som over, singulærverdier $\sqrt{9} = 3$ og $\sqrt{1} = 1$, og $U = A V \Sigma^{-1} = V$. For en symmetrisk positivt definit matrise er svd-faktoriseringen rett og slett den ortogonale diagonaliseringen:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3 La $Ax = \lambda x$ med $x \neq 0$. Vi ser på tallet $x^* A x = \lambda x^* x = \lambda \|x\|^2$. Adjungerer vi det (en 1×1 -matrise er sin egen transponerte), får vi

$$\overline{x^* A x} = (x^* A x)^* = x^* A^* x = x^* A x,$$

så $x^* A x$ er reelt, og siden $\|x\|^2 > 0$ er reelt, må λ være reell.

La så $Ax = \lambda x$ og $Ay = \mu y$ med $\lambda \neq \mu$. Da er

$$\lambda x^* y = (\lambda x)^* y = (Ax)^* y = x^* A^* y = x^* A y = \mu x^* y,$$

der vi brukte at λ er reell. Altså er $(\lambda - \mu) x^* y = 0$, og siden $\lambda \neq \mu$, er $x^* y = 0$. Med A^T istedenfor A^* er dette akkurat beviset for at symmetriske matriser har reelle egenverdier og ortogonale egenvektorer.

- 4 Den adjungerte er den transponerte med komplekskonjugerte elementer. Matrisen er symmetrisk, så vi trenger bare å konjugere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Ganger du den adjungerte med den opprinnelige, får du $4I$: dette er den diskrete fouriermatrisen for fire punkter, og delt på 2 er den unitær, jf. gammel eksamensoppgave 1.

- 5] Rodrigues' formel fra oppgave 7 med $y = (1, 1, 1)^T/\sqrt{3}$ og $\theta = \pi/3$. Generatoren er

$$S(y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(y)^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

og med $\sin \theta = \sqrt{3}/2$ og $1 - \cos \theta = 1/2$ blir

$$R = I + \frac{\sqrt{3}}{2} S(y) + \frac{1}{2} S(y)^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sjekk: $R(1, 1, 1)^T = (1, 1, 1)^T$, kolonnene er ortonormale, og R^2 er den sykliske permutasjonen $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$, som er rotasjonen $2\pi/3$ om diagonalen - to av våre rotasjoner etter hverandre. Oppgaven sier ikke hvilken vei, så R^T (rotasjon $-\pi/3$) er også et fullgodt svar.

- 6] Det karakteristiske polynomet er

$$(\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1,$$

med røtter

$$\lambda = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}.$$

For $\lambda = e^{i\theta}$ blir den første raden i $A - \lambda I$ lik $(-i \sin \theta, -\sin \theta)$, så egenvektoren er $(1, -i)^T$, og for $e^{-i\theta}$ er den $(1, i)^T$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} = e^{\pm i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}.$$

En rotasjon i planet har ingen reelle egenvektorer med mindre $\theta = 0$ eller π - da er matrisen $\pm I$ og alt er egenvektorer. Egenverdiene ligger på enhetssirkelen, som de må for en ortogonal matrise, og at de er $e^{\pm i\theta}$ er grunnen til at $e^{\theta S}$ med $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ er nettopp denne matrisen.