

4 - FLUENS STOLTE GANG OVER RULLEGARDINEN

James Clerk Maxwell er kreditert med den første komplette modellen av elektromagnetisme.¹ Han formulerte det som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne formen:

$$\begin{array}{ll}
 \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx \\
 \nabla \cdot B = 0 & \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0 \\
 \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \\
 c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} & c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS
 \end{array}$$

De til venstre er på differensialform, mens de til høyre er korresponderende likninger på integralform. Lovene er et koblet sett med differensial- eller integrallikninger, der E er det elektriske feltet,² B det magnetiske feltet,³ ρ en gitt ladningstetthet,⁴ J en gitt strømtetthet,⁵ c lyshastigheten i vakuum⁶ og ϵ_0 vakuumpermittiviteten.⁷ De elektriske og magnetiske feltene E og B er ukjente, mens ladningstettheten ρ og strømtettheten J er kjente. De ukjente feltene og strømtettheten er funksjoner fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$, mens ladningstettheten er en funksjon fra $\mathbb{R}^4$ (også rom og tid) til $\mathbb{R}$.

0 Pugg Maxwells lover og se hvor lang tid det tar å huske alle.

Målet med semesteret er å forstå symbolene i Maxwells likninger, og da må vi studere **flervariabel kalkulus**,⁸ altså læren om funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$. Her er en tabell:

m	n	Geometrisk tolkning
1	1	Kurve i planet som ikke kan skjære seg selv
2	1	Terreng med fjellsider uten overheng
3	1	Tetthet, trykk eller temperatur
4	1	Tetthet, trykk eller temperatur med tidsavhengighet
1	2	Kurve i planet som kan skjære seg selv
1	3	Kurve i rommet
2	2	Todimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon
2	3	Terreng med fjellsider med overheng
3	3	Tredimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon
4	3	Tredimensjonalt vektorfelt med tidsavhengighet

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

²https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field

³https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_field

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_density

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Current_density

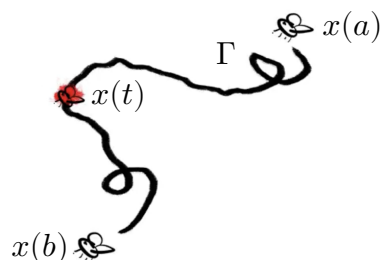
⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable_calculus

Vi skal holde oss til de verdiene av m og n i tabellen over. Tilfellet $m = n = 1$ er vi stort sett ferdige med; disse funksjonene lærte du om på skolen. Grafen til en slik funksjon kan ikke krysse seg selv og derfor er det noen begrensninger på hvor artige figurer man kan tegne med dem. Når $n = 2$ eller $n = 3$ blir alt mye morsommere.⁹ Vi skriver

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$



og grafen til x kalles Γ . Husk at vi skiller nøye mellom x , som er en funksjon, $x(t)$ som er et punkt i $\mathbb{R}^n$ og Γ som er en punktmengde. Dersom $n = 2$ kan du tenke på Γ som trajektorien til en flue som spaserer over rullegardinen, og når $n = 3$ surrer fluen rundt i rommet. På skolen kalte du det **parametrisert kurve**.¹⁰ Jeg har kutta ut fete typer for vektorer, for dere går i andre klasse nå og er klare til å takle dette. Jeg kommer også til å skrive

$$|x(t)| \quad \text{og ikke} \quad \|x(t)\|$$

for lengden til $x(t)$. Finn og skissér parametrisering for skjæringskurven mellom

$$\boxed{1} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 = 0$$

$$\boxed{2} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

$$\boxed{3} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\boxed{4} \quad x_1^2 + x_2^2 = x_3 \text{ og } x_1 + x_2 = 0$$

Trikset med å skjønne nye funksjoner er ofte å herje litt med funksjoner du har i ryggraden. Funksjonen $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

er en klassiker; den gir oss enhetssirkelen. Denne kjenner alle barn i barnehagen.

$$\boxed{5} \quad \text{Finn parametriseringer for sirklene gitt av likningene}$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad \text{og} \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

$$\boxed{6} \quad \text{Finn en parametrisering for ellipsen som tilfredsstiller}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$\text{og finn skjæringskurven mellom } 2x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Vi skriver $\mathbb{R}^{m \times n}$ for det mn -dimensjonale vektorrommet av $m \times n$ -matriser, slik at søylevektorer er inneholdt i $\mathbb{R}^{m \times 1}$ og radvektorer i $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Vi kan rotere grafer med **rotasjonsmatrisen**. Dette er en funksjon $R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gitt ved

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{7} \quad \text{Finn en parametrisering for en ellipse som ligger med førtifem graders vinkel på koordinataksene.}$$

⁹<https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_equation

Tangenten¹¹ til x er gitt ved

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at x er **deriverbar**. Definisjonen impliserer at

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}.$$

Her er t bare en eller annen uavhengig variabel uten noen spesiell fysisk tolkning - dersom det er klart at t er tiden, skriver vi

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hvis man tenker at Γ er trajektorien til en flue og at fluen har speedometer, er **banefarten**

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^T \dot{x}(t)} = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + \dots + (\dot{x}_n(t))^2}$$

det tallet som vises på speedometeret ved tiden t .

- 8 Finn tangent og banefart for alle kurvene på forrige side.

Buelengden til Γ finner du ved å integrere banefarten:¹²

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt$$

- 9 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at integralet over blir buelengden til kurven, og regn ut lengden til $x : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2 \arctan t \end{pmatrix}.$$

- 10 Finn omkretsen av en ellipse med halvaksler 3 og 4.

Du kan parametrisere en kurve Γ på mange måter. Men det er en som er litt spesiell, **buelengdeparametriseringen**. Dette er den parametriseringen der t er buelengden til kurven. Denne er som regel vanskelig eller umulig å finne et eksplisitt uttrykk for, men regnes som den mest "naturlige" parametriseringen, og brukes ofte i teoretiske utgreininger.

- 11 En flue flyr langs en **sirkulær heliks**¹³ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finn tangenten, banefarten, buelengden og buelengdeparametriseringen.

¹¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent>

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Arc_length

¹³<https://en.wikipedia.org/wiki/Helix>

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kalles *glatt* dersom $f \in \mathcal{C}^\infty$. For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ har ordet en litt annen betydning.

12 Skisser funksjonen $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $x(s) = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \end{pmatrix}$

Dette eksemplet er en klassiker. Komponentene $x_1(t) = t^2$ og $x_2(t) = t^3$ er glatte (altså inneholdt i $\mathcal{C}^\infty$), men kurven til x har en kusp i origo, noe $\mathcal{C}^\infty$ -funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ ikke kan. er at banefarten er null når $t = 0$, og da kan alt skje. Hvis fluen stopper helt opp, kan den begynne å kjøre en annen vei når den begynner å fly igjen, og da kan kurven få en knekk. **Enhetstangentvektoren**¹⁴ ved tiden t er gitt ved

$$T(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}.$$

13 La x være funksjonen fra forrige oppgave, og vis at

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} T(t)$$

Vi sier at en funksjon fra $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ er **glatt** i t dersom enhetstangentvektoren eksisterer og dreier på et kontinuerlig vis etterhvert som vi beveger oss langs kurven. En tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for dette er at komponentfunksjonene er deriverbare og $|\dot{x}(t)| \neq 0$.

14 Hva med

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}?$$



15 Hva har skjedd her?



¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent_vector

Enhetsnormalvektoren er gitt ved

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}.$$

så lenge $T'(t) \neq 0$. Definisjonen av enhetsnormalvektoren ser litt rar ut, men motiveres av følgende oppgave.

- 16 Vis at $T'(t)$ står normalt på $T(t)$ så lenge $T'(t) \neq 0$.
(Hint: deriver likningen $T(t)^T T(t) = 1$.)

Størrelsen

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^T x'(t)}\right)^3}$$

kalles kurvens **krumning**.¹⁵ Dersom x er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^3$ er **binormalvektoren** kryssproduktet mellom T og N :

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

mens

$$\tau(t) = \frac{\left(x'(t) \times x''(t)\right)^T x'''(t)}{|x'(t) \times x''(t)|^2}$$

kalles **torsjonen**.¹⁶ Enhetstangenten, enhetsnormalen og enhetsbinormalen danner en under noen milde betingelser på x en vakker og nyttig basis for $\mathbb{R}^3$ som kalles **frenetrammen**.¹⁷

- 17 Finn buelengde, enhetstangent, enhetsnormal, binormal, krumning og torsjon til alle funksjonene så langt i økten. (Noen av dem er håpløse å regne ut for hånd.)
- 18 Finn buelengde, enhetstangent, enhetsnormal, binormal, krumning og torsjon til løsningen på oppgave 4 her: <https://mortano.folk.ntnu.no/eksamen/4106-25v-bm.pdf>



¹⁵<https://en.wikipedia.org/wiki/Curvature>

¹⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_of_a_curve

¹⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet-Serret_formulas

UKENS NØTTER

- 1 Vis at krumningsradien til x kan skrives

$$R(t) = \frac{|\dot{x}(t)|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$

- 2 En ellipse med halvaksler rotert $\pi/4$ adianer i forhold til koordinataksene tilfredsstiller likningen

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1.$$

Vis at kurven parametrisert ved

$$x(t) = (\cos t, \cos(t + \phi))$$

ligger på en slik ellipse.

- 3 Fresnelintegralene er definert ved

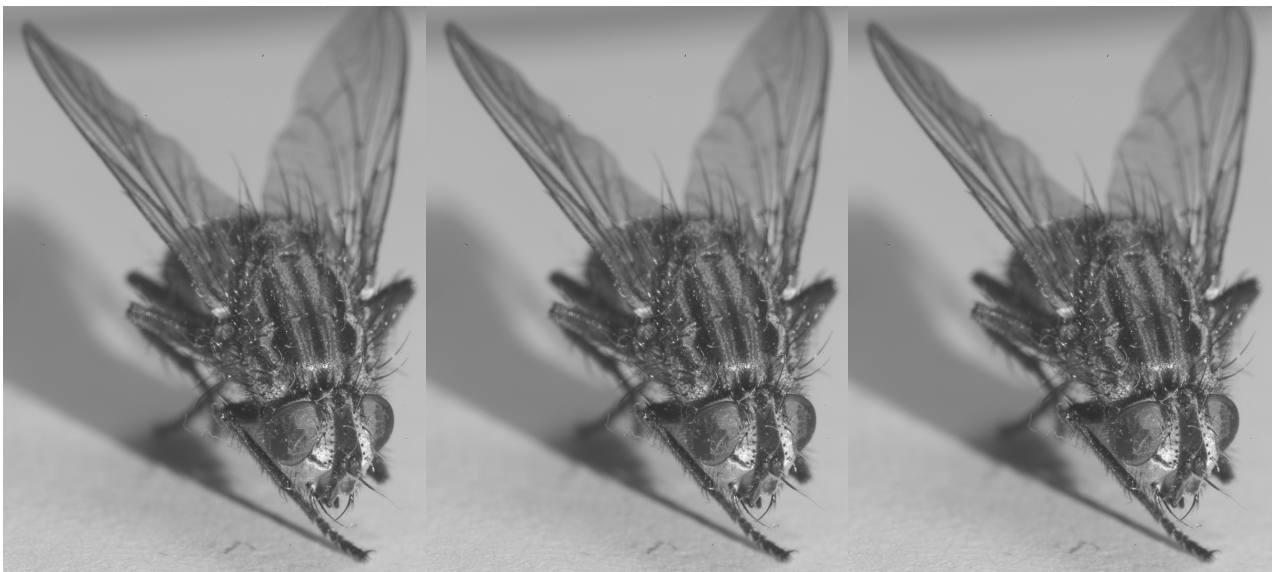
$$C(t) = \int_0^T \cos(s^2) ds \quad S(t) = \int_0^T \sin(s^2) ds$$

Disse dukker opp i forbindelse med optikk. Nå brukes de visst mest til å lage klotoider i rundkjøringer, for den parametriserte kurven

$$x(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

har spesielt pen krumning. Kurven kalles Eulerkurven.¹⁸ Finn buelengde, enhetstangent og krumning.

- 4 Vis at buelengden er uavhengig av parametriseringen.



¹⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral