

4 - KONVOLUSJON - LF

- 1 Det finnes trettiseks måter to terninger kan lande på, og de er alle like sannsynlige. Formelen blir

$$P(Z = z) = \sum_k P(X = k) P(Y = z - k).$$

og sannsynlighetsfordelingen ser slik ut:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Å summere et produkt av to funksjoner der den enes argument løper forover og den andres løper bakover, kalles en konvolusjon.

- 2 Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z - v$, tar $X + Y$ verdien z . Med andre ord kan $X + Y$ ta verdien z på mange forskjellige måter, og for å finne sannsynlighetstettheten til $X + Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle måtene dette kan skje på, altså alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z - v)$. Sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X + Y$ blir derfor

$$P(X + Y = z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z - v) dv = f * g.$$

- 3 Kretsen til venstre er lavpassfilteret og kretsen til høyre er høypassfilteret. For lavpassfilteret gir kirchhoffs spenningslov enten

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = f(t) \quad \text{eller} \quad RC\dot{x}(t) + x(t) = f(t)$$

siden

$$x(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{og} \quad C\dot{x}(t) = i(t).$$

Bytter vi plass på motstand og kondensator, får vi høypassfilteret, som også gir

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = f(t)$$

men nå er

$$x(t) = Ri(t)$$

slik at

$$x(t) + \frac{1}{RC} \int x(t) dt = f(t)$$

På wikisidene til lavpassfilteret står differensiallikningen, mens på wikisiden til høypassfilteret står bare overføringsfunksjonen. Dette har antagelig å gjøre med at det som naturlig detter ut

av kirchhoff er en integrallikning og ikke en differensiallikning. Systemfunksjonene får vi ved å laplacetransformere. Lavpassfilteret gir $RCsX + X = F$, altså

$$H_{lp}(s) = \frac{1}{RCs + 1},$$

og høypassfilteret gir $X + \frac{1}{RCs}X = F$ (integrasjonsregelen fra oppgave 39 i økt 1), altså

$$H_{hp}(s) = \frac{RCs}{RCs + 1}.$$

Vi ser at $H_{lp}(0) = 1$ og $H_{lp}(i\omega) \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow \infty$, og motsatt for høypassfilteret. Legg også merke til at $H_{lp} + H_{hp} = 1$ - de to kretsene deler signalet mellom seg, og det som ikke slipper gjennom det ene filteret, slipper gjennom det andre. Løsningen er

$$X(s) = H(s)F(s),$$

og hva dette blir i tidsdomenet er hele temaet for denne økten: $x = h * f$, der h er impulsresponsen - se oppgave 4 og 5.

- 4 La oss si at vi har løst systemet

$$Lx = f \quad x(0) = 0$$

med laplacetransform og fått

$$X(s) = H(s)F(s).$$

Dersom vi isteden løser

$$Lx = \delta,$$

får vi

$$X(s) = H(s)\mathcal{L}(\delta) = H(s) \cdot 1 = H(s),$$

så h er systemets respons på diracpulsen - **impulsresponsen**. Det er dette som er innholdet i historien om startpistolen i Nidarosdomen: fyrer du av en diracpuls i et system og tar opp det som kommer ut, har du målt h , og da vet du alt som er å vite om systemet.

- 5 Det som gjør konvolusjon så praktisk i forhold til lineær systemteori, kalles konvolusjonsteoremet. Vi bruker variabelskiftet $u = t - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned} \widehat{x * y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t-v) dv e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t-v) e^{-i\omega t} dv dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv y(u) e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-i\omega u} du = \hat{x} \hat{y} \end{aligned}$$

Underveis byttet vi rekkefølge på integralene og skiftet variabel inne i et dobbeltintegral. Begge deler er lov når signalene er pene nok, og begge deler skal vi se ordentlig på når vi kommer til dobbeltintegraler senere i semesteret.

- 6 Vi gjetter som hintet sier,

$$x(t) = c(t)e^{-\lambda t},$$

og setter inn:

$$\dot{x} + \lambda x = \dot{c} e^{-\lambda t} - \lambda c e^{-\lambda t} + \lambda c e^{-\lambda t} = \dot{c} e^{-\lambda t} = f(t).$$

De to leddene med λ tar livet av hverandre, og det er hele poenget med gjetningen. Da er

$$\dot{c}(t) = f(t)e^{\lambda t} \quad \text{og} \quad c(t) = c(0) + \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds,$$

og initialkravet gir $c(0) = x(0) = x_0$. Altså

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)} ds.$$

Se på det siste integralet. Det er konvolusjonen mellom pådraget f og impulsresponsen $e^{-\lambda t}$, så formelen sier

$$x = x_0 e^{-\lambda t} + h * f.$$

Systemet husker alt som har hendt det. Et pådrag som kom ved tiden s står fortsatt i løsningen ved tiden t , men vektet med $e^{-\lambda(t-s)}$. Systemet glemmer eksponentielt, og gamle synder betyr mindre enn nye.

7 Laplacetransform gir

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1},$$

og konvolusjonsteoremet gjør produktet om til

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \sin(u) \sin(t-u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2u-t) - \cos t) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2u-t) \Big|_0^t - t \cos t \right) \\ &= \frac{\sin t - t \cos t}{2}. \end{aligned}$$

Her brukte vi produkt-til-sum-formelen $\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B))$ i det andre steget. Dette er oppgave 23 fra økt 1 om igjen, men der var konvolusjonsregelen et triks vi måtte få servert. Nå er den vår. Det er $t \cos t$ -leddet som er interessant: påtrykket er en homogen løsning, og systemet svarer med å vokse uten grense. Resonans, som før.

8 Vi fourieromvender begge sider av varmelikningen $\dot{u} = \Delta u$ med hensyn på x . Venstresiden først. Tidsderivasjonen kan flyttes ut av integralet,

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t),$$

siden integralet går over x og deriverer i t . Høyresiden tar vi med derivasjonsregelen fra oppgave 15 i økt 2, brukt to ganger:

$$\widehat{\Delta u} = (ik)^2 \hat{u} = -k^2 \hat{u}.$$

Altså

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t).$$

Dette er verdt å stirre litt på. Den partielle differensiallikningen koblet alle punktene på stangen sammen - temperaturen i x brydde seg om naboene. I frekvensdomenet er koblingen borte. Hver k har fått sin egen ordinære differensiallikning, den samme som vi har løst hele høsten, og de blander seg ikke med hverandre. Det er dette fourieromvendingen gjør: den diagonaliserer.

9 Likningen fra forrige oppgave har løsning

$$\hat{u}(k, t) = A(k)e^{-k^2 t},$$

og setter vi inn $t = 0$ og fourieromvender initialkravet $u(x, 0) = f(x)$, ser vi at $A(k) = \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$. Altså

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}.$$

Det gjenstår å kjenne igjen $e^{-k^2 t}$ som fourieromvendingen til en normalfordeling. I oppgave 10 regner vi ut at standardnormalfordelingen har fourieromvending $e^{-k^2/2}$, og skaleringsregelen fra oppgave 18 i økt 2 gjør resten: med $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ og $a = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ er

$$\widehat{\varphi(ax)} = \frac{1}{a} \hat{\varphi}\left(\frac{k}{a}\right) = \sqrt{2t} e^{-k^2 t},$$

slik at

$$e^{-k^2 t} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}\right).$$

Funksjonen i parentesen er normalfordelingen med forventning 0 og varians $2t$. Fourieromvendingen til løsningen er altså produktet av fourieromvendingen til initialkravet og fourieromvendingen til en normalfordeling som blir bredere med tiden, akkurat som oppgaven ba oss vise.

10 La oss studere funksjonen

$$x(t) = e^{-t^2/2}$$

Hele utledningen bygger på to pene faktum. Det første er at

$$\dot{x}(t) = -te^{-t^2/2}$$

og det andre er at

$$\frac{d}{d\omega} x(t)e^{-i\omega t} = -itx(t)e^{-i\omega t}$$

som til sammen gir

$$i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = -i \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega)$$

eller

$$\omega \hat{x}(\omega) + \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = 0.$$

Som alle barn i barnehagen vet, kan en differensiallikning ofte løses ved å herje litt og integrere. I dette tilfellet er herjingen å gange med $e^{\omega^2/2}$:

$$e^{\omega^2/2}\omega\hat{x}(\omega) + e^{\omega^2/2}\frac{d}{d\omega}\hat{x}(\omega) = 0,$$

for da ser vi at dette bare er likningen

$$\frac{d}{d\omega} \left(e^{\omega^2/2}\hat{x}(\omega) \right) = 0,$$

som integrerer til

$$e^{\omega^2/2}\hat{x}(\omega) = c,$$

eller

$$\hat{x}(\omega) = ce^{-\omega^2/2}.$$

Konstanten c kan vi bestemme ved å evaluere likningen i $\omega = 0$:

$$c = \hat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

Det siste integralet er det vi skal regne ut senere i semesteret, jf. hintet. Konklusjonen er at

$$\hat{x}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2},$$

og siden fourieromvending er en lineæroperator, er fourieromvendingen til standardnormalfordelingen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ lik $e^{-\omega^2/2}$, enkelt og greit. Normalfordelingen er altså nesten sin egen fourieromvending, og det er en av grunnene til at den er overalt.

11 Vi har alt vi trenger. Fra oppgave 9 er

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t} \quad \text{og} \quad e^{-k^2 t} = \mathcal{F} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} \right),$$

så $\hat{u}$ er et produkt av to fourieromvendinger, og konvolusjonsteoremet sier at da er u konvolusjonen av de to signalene:

$$u(x, t) = f * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4t}} dv.$$

Varmelikningen filtrerer altså initialkravet med en normalfordeling, og filteret blir bredere for hvert sekund som går. Skarpe detaljer i temperaturprofilen midles bort først, de store trekkene sist, akkurat som vi så i forrige økt - men nå står det i én formel. Onde tunger vil kanskje hevde at $u(x, t)$ ikke er definert for $t = 0$. Dette er ikke bra, for vi har jo prøvd å få til at $u(x, 0) = f(x)$. Nå kan det heldigvis vises at

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x),$$

men dette er for vanskelig for oss.

- 12 Koeffisientformelen først. Vi tar indreproduktet av x med en av basisvektorene og lar ortogonaliteten gjøre jobben:

$$(x, v_l) = \left(\sum_{k=1}^n c_k v_k, v_l \right) = \sum_{k=1}^n c_k (v_k, v_l) = c_l (v_l, v_l),$$

siden alle leddene med $k \neq l$ er null. Altså

$$c_l = \frac{(x, v_l)}{(v_l, v_l)}.$$

Så Parseval. Vi setter inn begge summene og ganger ut:

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n c_k v_k, \sum_{l=1}^n d_l v_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k d_l (v_k, v_l) = \sum_{k=1}^n c_k d_k (v_k, v_k).$$

Av de n^2 leddene i dobbeltsummen overlever bare de n på diagonalen. Er basisen i tillegg ortonormal, er $(v_k, v_k) = 1$ og

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k d_k,$$

med spesialtilfellet

$$(x, x) = \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Pytagoras, i n dimensjoner.

- 13 Regningen er den samme som i forrige oppgave, men nå må vi holde tungen rett i munnen med komplekskonjugeringen, og svaret avhenger av hvilken faktor indreproduktet er lineært i. Anta først at det er lineært i første faktor, slik at $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ og $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$. Da er

$$(x, v_l) = \sum_{k=1}^n c_k (v_k, v_l) = c_l (v_l, v_l) \quad \Rightarrow \quad c_l = \frac{(x, v_l)}{(v_l, v_l)},$$

og

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k \bar{d}_l (v_k, v_l) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{d}_k (v_k, v_k).$$

Er indreproduktet isteden lineært i andre faktor, slik som det komplekse skalarproduktet x^*y , må vi sette basisvektoren i første posisjon for at koeffisienten skal komme uskadd ut:

$$(v_l, x) = \sum_{k=1}^n c_k (v_l, v_k) = c_l (v_l, v_l) \quad \Rightarrow \quad c_l = \frac{(v_l, x)}{(v_l, v_l)},$$

og Parseval blir

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{c}_k d_l (v_k, v_l) = \sum_{k=1}^n \bar{c}_k d_k (v_k, v_k).$$

I begge konvensjonene er spesialtilfellet det samme:

$$(x, x) = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 (v_k, v_k).$$

Konjugeringen forsvinner ikke - den er selve grunnen til at (x, x) er reell og positiv, og til at lengder gir mening i komplekse rom.

14 Vi bruker indreproduktet

$$(x, y) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \overline{y(t)} dt,$$

som er lineært i første faktor. Basisen er $v_n(t) = e^{in\omega t}$ med $n \in \mathbb{Z}$, og den er ortonormal under akkurat dette indreproduktet:

$$(v_n, v_m) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m, \end{cases}$$

som er oppgave 3 i økt 2 delt på T . Koeffisientformelen fra oppgave 13 blir da

$$c_n = (x, v_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt,$$

som er nøyaktig formelen for fourierkoeffisientene - den var altså aldri noe annet enn koeffisientformelen i et indreproduktrom. Og Parseval blir

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \overline{y(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n},$$

med spesialtilfellet

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Venstresiden er signalets middeleffekt. Høyresiden er summen av effekten i hver overtone. Parseval sier at ingenting blir borte i regnskapet: all effekt i signalet står bokført på en frekvens.

15 Vi konjugerer koeffisientformelen. Siden x er reell, er $\overline{x(t)} = x(t)$, og

$$\overline{c_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t) e^{-in\omega t}} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{in\omega t} dt = c_{-n}.$$

Det er hele regningen. Innholdet er at for reelle signaler bærer de negative frekvensene ikke ny informasjon - de er speilbildet av de positive. Det er derfor leddene $c_n e^{in\omega t}$ og $c_{-n} e^{-in\omega t}$ alltid kan slås sammen til reelle cosinus- og sinusledd, slik du er vant til fra TMA4410.

16 Dirichletkjernen er en geometrisk sum, og vi behandler den som en. Cosinusformen først:

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{int} + e^{-int}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nt.$$

Så den lukkede formen. Vi summerer den geometriske rekken med startledd e^{-iNt} , kvotient e^{it} og $2N + 1$ ledd:

$$D_N(t) = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}}{e^{it} - 1}.$$

Nå ganger vi oppe og nede med $e^{-it/2}$, slik at brøken blir symmetrisk:

$$D_N(t) = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

Så partialsummen. Vi setter koeffisientformelen inn i partialsummen og bytter rekkefølge på sum og integral:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-ins} ds e^{int} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \sum_{n=-N}^N e^{in(t-s)} ds,$$

og der står kjernen:

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) D_N(t-s) ds = \frac{1}{2\pi} x * D_N.$$

(For periodiske signaler går konvolusjonsintegralet over én periode.) Så en partialsum er ikke noe annet enn signalet filtrert med dirichletkjernen. Å kutte fourierrekken etter N ledd er å konvolvare med en tilnærmet diracpuls som ikke er helt ferdig - og krusningene rundt hovedtoppen i D_N er nøyaktig det som gir gibbsfenomenet.¹

- 17 Regningen går som for konvolusjonsteoremet, bare at vi nå putter inn inversomvendingen istedenfor å skifte variabel. Vi skriver

$$\overline{y(t)} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{y}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega,$$

setter inn og bytter rekkefølge på integralene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\hat{y}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{y}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \overline{\hat{y}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Det innerste integralet ble til $\hat{x}(\omega)$ av seg selv - det er hele beviset. Setter vi $y = x$, står spesialtilfellet der:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega,$$

og tolkningen er den samme som for Parseval: energien i signalet er den samme enten du gjør opp regnskapet i tid eller i frekvens.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Vi ganger ut:

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2.$$

Dette er lik $\|x\|^2 + \|y\|^2$ hvis og bare hvis $x \cdot y = 0$, altså hvis og bare hvis x og y er ortogonale. Pytagoras' setning holder med andre ord bare for rettvinklede trekanter, og det er en av grunnene til at det er så praktisk med ortogonale basiser: da er $\|x\|^2 = \sum |c_k|^2 \|v_k\|^2$, som er Parsevals teorem.

- 2 Vi deriverer under integraltegnet:

$$F'(k) = \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ikx} dx,$$

og i $k = 0$ er dette

$$F'(0) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = -iE.$$

Deriverer du én gang til, får du $F''(0) = -\int x^2 f(x) dx$, så fourieromvendingen til en sannsynlighetstetthet inneholder alle momentene - statistikerne kaller den den **karakteristiske funksjonen**.²

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_function_\(probability_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_function_(probability_theory))