

3 - FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE I - LF

- 1 Helt banalt, som lovet:

$$\dot{u} = -e^{-t} \sin x \quad \ddot{u} = e^{-t} \sin x \quad \nabla u = e^{-t} \cos x \quad \Delta u = -e^{-t} \sin x.$$

- 2 Ingen bakterier skal forsvinne, så eneste måte antallet bakterier mellom a og b kan endre seg på, er at bakterier flyter inn over randen ved a eller ut over randen ved b . Fluksen teller bakterier per sekund i positiv x -retning, så

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = J(a, t) - J(b, t) = \rho(a, t)v(a, t) - \rho(b, t)v(b, t).$$

Nå bruker vi analysens fundamentalteorem

$$\int_a^b \partial_x f(x) dx = f(b) - f(a)$$

baklengs på høyresiden, og drar tidsderivasjonen under integraltegnet på venstresiden:

$$\int_a^b \partial_t \rho(x, t) dx = - \int_a^b \partial_x (\rho(x, t)v(x, t)) dx,$$

altså

$$\int_a^b \partial_t \rho(x, t) + \partial_x (\rho(x, t)v(x, t)) dx = 0.$$

Dette skal gjelde uansett hvilke integrasjonsgrenser a og b vi velger, og da må integranden være null overalt: hadde den vært positiv i et punkt, kunne vi valgt et bitte lite intervall rundt akkurat det punktet og fått et positivt integral. Følgelig er

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x (\rho(x, t)v(x, t)) = 0.$$

Trikset i siste steg - "gjelder det for alle intervaller, gjelder det punktvis" - er verdt å huske, for det er standardmåten å komme seg fra integralform til differensialform, og du får bruk for det siden.

- 3 Kontinuitetslikningen sier

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0,$$

og setter vi inn $J = -D\nabla\rho$, får vi

$$\partial_t \rho + \partial_x (-D\nabla\rho) = 0 \quad \text{altså} \quad \dot{\rho} = D\Delta\rho.$$

Vi skal komme tilbake til Fikcs lov senere i kurset, når vi skal studere stiging i flere romlige koordinater.

- 4 Massen til den lille biten er ρh , og akselerasjonen er $\ddot{u}(x, t)$, så Newtons andre lov gir

$$\rho h \ddot{u}(x, t) = T_1 + T_2,$$

der T_1 og T_2 er de vertikale komponentene av strengestrekket i endene av biten. Nå kommer kongruenstrikset fra figuren: strekkraften peker langs strengen, så trekanten som dekomponerer kraften i horisontal og vertikal del er formlik med trekanten som gir stigningen til strengen. Siden den horisontale komponenten er T i begge ender, er

$$T_2 = T \nabla u(x + h, t) \quad \text{og} \quad T_1 = -T \nabla u(x, t),$$

med minus på venstre ende fordi strekket der drar mot venstre. Innsatt:

$$\rho h \ddot{u}(x, t) = T(\nabla u(x + h, t) - \nabla u(x, t)).$$

Deler vi på Th og lar $h \rightarrow 0$, står det

$$\frac{\rho}{T} \ddot{u}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla u(x + h, t) - \nabla u(x, t)}{h} = \Delta u(x, t),$$

altså

$$\ddot{u} = c^2 \Delta u \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Her kan det være lurt å dobbeltsjekke benevnningen; T er i newton, altså $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$, og ρ i kg/m , så T/ρ har benevnning m^2/s^2 , så c blir fart. Krumningen bestemmer akselerasjonen, positiv krumning gir akselerasjon oppover og negativ krumning gir akselerasjon nedover. Stram og lett streng gir høy bølgefart - strammer du strengen går tonen opp, og tykke gir dypere toner enn tynne strenger.

- 5 Se på biten av ledningsparet mellom x og $x + h$. Den har induktans Lh , og over en spole er spenningsfallet $Lh \partial_t i$, så spenningen som kommer ut av biten er

$$v(x + h, t) = v(x, t) - Lh \partial_t i(x, t).$$

Kondensatoren mellom ledningene har kapasitans Ch , og strømmen som lekker over den er $Ch \partial_t v$, så strømmen som kommer ut i andre enden er

$$i(x + h, t) = i(x, t) - Ch \partial_t v(x, t).$$

Flytter vi $v(x, t)$ og $i(x, t)$ over på venstresidene, deler på h og lar $h \rightarrow 0$, får vi telegraflikningene

$$\partial_x v = -L \partial_t i \quad \partial_x i = -C \partial_t v.$$

Dette er to koblede likninger av første orden, akkurat som systemene fra første økt, og vi dekobler dem på samme måte: deriver den første med hensyn på x og den andre med hensyn på t ,

$$\partial_{xx} v = -L \partial_x \partial_t i = -L \partial_t \partial_x i = -L \partial_t (-C \partial_t v) = LC \partial_{tt} v,$$

altså

$$\ddot{v} = c^2 \Delta v \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

og bytter du rollene til de to likningene får du nøyaktig det samme for i . Spenningen på en transmisjonslinje tilfredsstiller nøyaktig samme likning som gitarstrengen. Signaler på lange linjer går som bølger med fart $1/\sqrt{LC}$ og disse kan reflekteres i enden av linjen.¹

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Impedance_matching

- 6 Her har jeg gitt deg løsningene slik at du kan trene på partiellderivasjon. Teknikken for å finne løsningene fra scratch heter separasjon av variable og kommer i TMA4430.² Vi deriverer

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

én gang med hensyn på tid og to ganger med hensyn på rom:

$$\dot{u}_n(x, t) = -\alpha n^2 b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

$$\nabla u_n(x, t) = n b_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)$$

$$\Delta u_n(x, t) = -n^2 b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx).$$

Sammenlikner vi første og siste linje, ser vi at

$$\dot{u}_n = \alpha \Delta u_n,$$

så varmelikningen er tilfredsstilt. For randkravene må vi ha

$$u_n(0, t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin 0 = 0 \quad u_n(\pi, t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(n\pi) = 0,$$

som gir at n må være et heltall. Dette kalles **kvantisering** og det er det samme som skjer i kvantefysikk.³ Legg også merke til fysikken i $e^{-\alpha n^2 t}$ - overtone n dør ut mye fortere enn grunntonen. (Fine detaljer i temperaturprofilen visker ut nesten umiddelbart, mens de store trekkene henger igjen lengre.)

- 7 Med

$$u_n(x, t) = (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx)$$

får vi

$$\ddot{u}_n(x, t) = -c^2 n^2 (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx)$$

$$= -c^2 n^2 u_n(x, t)$$

$$\Delta u_n(x, t) = -n^2 (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx)$$

$$= -n^2 u_n(x, t),$$

slik at

$$\ddot{u}_n = c^2 \Delta u_n.$$

Randkravene går akkurat som i forrige oppgave: $\sin 0 = \sin(n\pi) = 0$ dersom n er et heltall. Forskjellen fra varmelikningen sitter i tidsfaktoren: der varmelikningens $e^{-\alpha n^2 t}$ dør ut, svinger denne evig med vinkelfrekvens cn - det er dette som er overtonene. Grunntonen $n = 1$ svinger med frekvens $c/2\pi$ (i Hz), og de andre overtonene er heltallsmultipler av denne. Bølgelikningen modellerer også den stående luftbølgen i et blåseinstrument, så nå om du spiller i korps vet du nå hvorfor du kan endre leppetrykket og spille deg oppover i overtonerekka uten å trykke ned andre klaffer eller ventiler. (Dette går å gjøre med buen på et strykeinstrument også, men det er mye vanskeligere å få til, og har derfor ingen praktisk nytteverdi.)

²https://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables

³https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics

https://en.wikipedia.org/wiki/Particle_in_a_box

- 8 Hver u_n tilfredsstiller varmelikningen og randkravene, og begge deler er lineære, så superposisjonsprinsippet gir at

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

også gjør det. Setter vi inn $t = 0$, er $e^{-\alpha n^2 \cdot 0} = 1$, så initialkravet $u(x, 0) = f(x)$ krever nettopp

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Med én enkelt u_n går dette åpenbart ikke med mindre f tilfeldigvis er en skalarmultiplum av $\sin(nx)$, og det var her Joseph Fourier kom med sin sprø idé: legger du sammen nok overtoner, kan du treffe nesten hva som helst. En uendelig sum av sinuser kan bli selv den infernalske og stygge lyden av en klarinett. Han hadde rett, og resten av regningen - formelen for b_n - kan du allerede fra TMA4410.

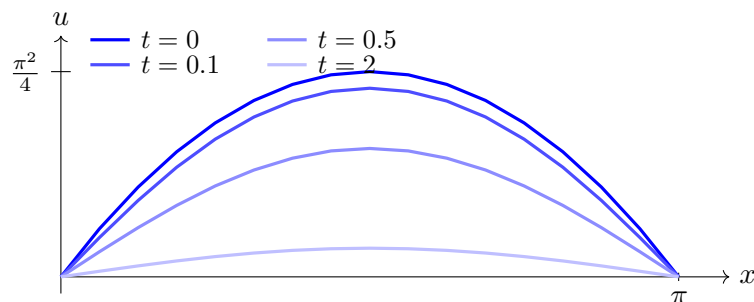
- 9 Vi har alt vi trenger: initialtemperaturen er $f(x) = x(\pi - x)$, og fourierkoeffisientene er regnet ut i teksten over,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{odde } n \end{cases}$$

så løsningen er

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-\alpha(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x).$$

Under er løsningen plottet (med $\alpha = 1$) ved $t = 0$, $t = 0.1$, $t = 0.5$ og $t = 2$:



Temperaturprofilen siger ned mot null uten å skifte karakter nevneverdig, og det er fordi rekken nesten umiddelbart domineres av grunntonen: allerede leddet $n = 3$ starter 27 ganger mindre enn grunntonen og dør ut 9 ganger forttere. Etter kort tid er løsningen i praksis $\frac{8}{\pi} e^{-\alpha t} \sin x$ - sammenlign gjerne med oppgave 1.

- 10 Fouriers varmelov sier at varmestrømmen er proporsjonal med temperaturgradienten, $q = -k \nabla u$. At endepunktene er isolerte betyr at ingen varme strømmer gjennom dem, altså $q = 0$ der, og siden $k \neq 0$ betyr det

$$\nabla u(0, t) = \nabla u(\pi, t) = 0.$$

Merk forskjellen på de to randkravene i fysiske termer: dirichletkravet spikrer *temperaturen* i endene (stangen står med endene i isvann), mens neumannkravet spikrer *varmestrømmen* (stangen har endene pakket inn i Glava). Stangen mister energi gjennom endene i det første tilfellet, men ikke i det andre, og det kommer til å synes i løsningen i neste oppgave.

11 Mer trening i partiellderivasjon. Leddene i summen er

$$v_n(x, t) = a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx),$$

og vi deriverer:

$$\dot{v}_n(x, t) = -\alpha n^2 a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)$$

$$\nabla v_n(x, t) = -n a_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

$$\Delta v_n(x, t) = -n^2 a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx).$$

Første og siste linje gir $\dot{v}_n = \alpha \Delta v_n$ akkurat som i oppgave 6 - varmelikningen bryr seg ikke om forskjellen på sinus og cosinus. Det gjør derimot randkravene, for neumannkravet treffer den *derivate*, altså den midterste linjen:

$$\nabla v_n(0, t) = -n a_n e^{-\alpha n^2 t} \sin 0 = 0 \quad \nabla v_n(\pi, t) = -n a_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(n\pi) = 0,$$

igjen fordi n er et heltall. Så der dirichletkravet slapp gjennom sinusene, slipper neumannkravet gjennom cosinusene. Konstantleddet $\frac{1}{2}a_0$ må også sjekkes, og det består glatt: en konstant har $\dot{u} = 0$, $\Delta u = 0$ og $\nabla u = 0$ overalt, så både likningen og randkravene er oppfylt. (Du kan gjerne tenke på konstantleddet som $n = 0$ i cosinusfamilien. I dirichletproblemet finnes det ikke noe slikt ledd, for en konstant som er null på randen er null overalt.) Superposisjonsprinsippet gir da at

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)$$

tilfredsstiller både varmelikningen og neumannkravene, og setter vi inn $t = 0$, står det

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = f(x),$$

som er en cosinusrekke for f - den kjenner du også fra TMA4410, med koeffisienter

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Til slutt fysikken, som er den fineste delen: la $t \rightarrow \infty$. I dirichletproblemet dør alt ut og stangen ender på null grader - den lekker all varmen sin ut i isvannet. Her overlever konstantleddet, og stangen ender på

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

altså *gjennomsnittet* av initialtemperaturen. Selvfølgelig gjør den det: varmen kan ikke slippe ut, så den eneste muligheten er å fordele seg jevnt.