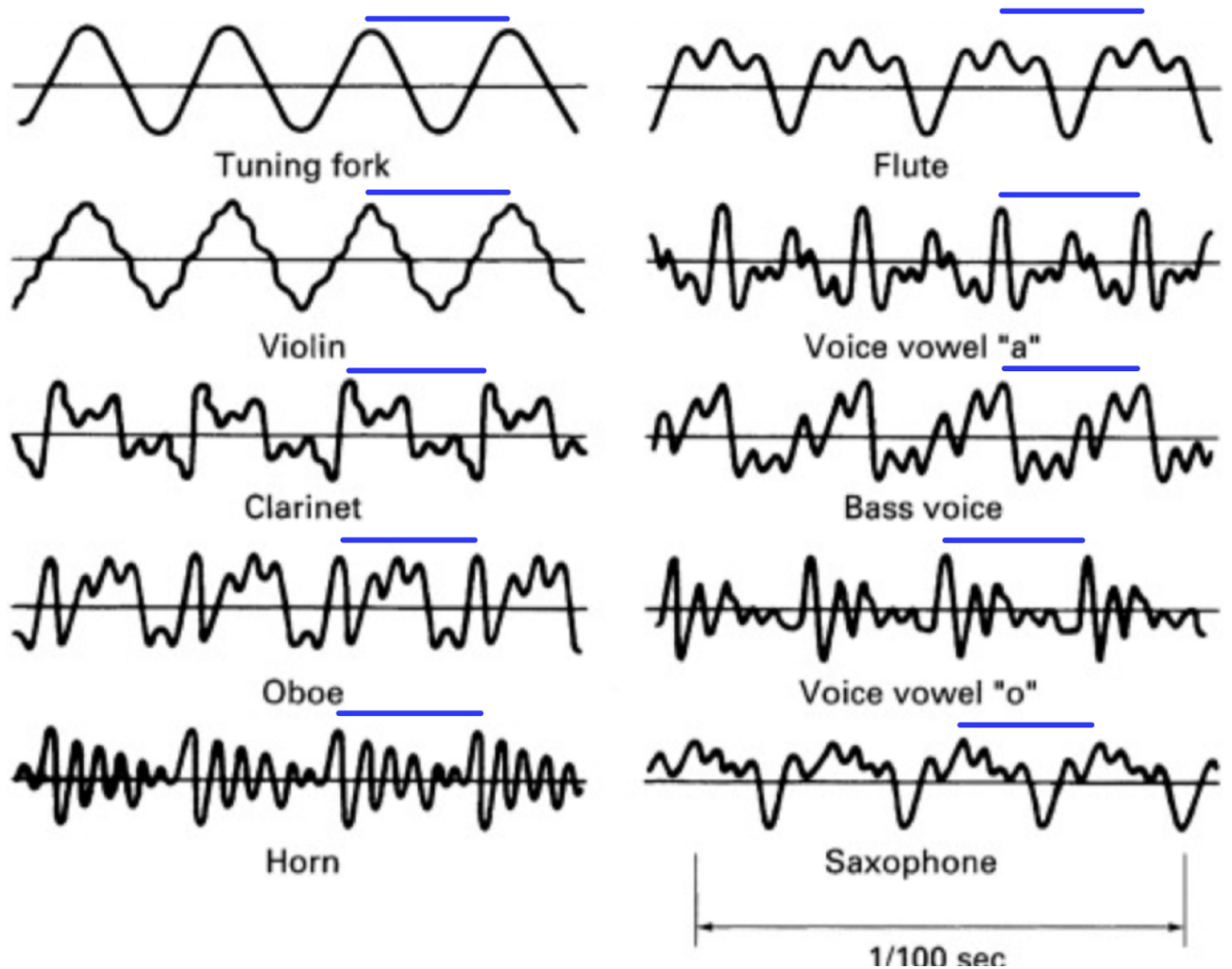


2 - FOURIERTRANSFORM - LF

1



2 Hvis $f = 100$ hertz, blir $\omega = 2\pi f \approx 628$ radianer per sekund.

3 Lett! Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

og dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \frac{1}{i(n-m)\omega} e^{i(n-m)\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

slik at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Nå tar vi likningen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

og ganger med $e^{-im\omega t}$ og integrerer:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt$$

og så gjør Satan en egentlig ulovlig flytting av integraltegnet (siden summen går mot uendelig), slik at hen kan bruke ortogonaliteten og drepe alle ledd i summen unntatt ett:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = c_m \cdot T$$

slik at hun kan skrive

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt.$$

4 Vi laplacetransformerer likningen

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{RC}x(t) = \frac{1}{RC}f(t)$$

og får

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{1}{RC}F,$$

slik at systemfunksjonen - eller transferfunksjonen eller overføringsfunksjonen eller hva det nå heter - blir

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

og frekvensresponsen

$$H(i\omega) = \frac{1}{RCi\omega + 1}.$$

Legg merke til at $H(0) = 1$. Det må det være: et lavpassfilter skal slippe likespenning uendret gjennom, så hadde vi fått noe annet enn 1 her, hadde vi regnet feil et sted.

Nå bruker vi at systemet er lineært. Pipelyden er

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{(2n-1)it},$$

og hvert enkelt ledd $e^{i\omega t}$ kommer ut igjen som $H(i\omega)e^{i\omega t}$ (det var jo nettopp derfor vi gadd å regne ut H). Konstantleddet $\frac{1}{2}$ er en frekvens null-komponent og slipper gjennom som $H(0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Altså er

$$\begin{aligned} \text{mykere pipelyd } x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H(i(2n-1))}{2n-1} e^{(2n-1)it} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(RCi(2n-1) + 1)} e^{(2n-1)it}. \end{aligned}$$

Her har jeg satt $\omega = 1$ for at det ikke skulle bli så mye griseri, men du finner uttrykket for vilkårlige ω ved å ta rekken og bruke H på nøyaktig samme måte.

At middelverdien fortsatt er $\frac{1}{2}$ er en grei kontroll: firkantbølgen ligger i snitt på $\frac{1}{2}$, og et lavpassfilter flytter ikke på snittet - det bare runder av hjørnene. Og nå ser vi også hvorfor kretsen kalles et lavpassfilter: overtone nummer $2n - 1$ blir dempet med faktoren

$$|H(i(2n - 1))| = \frac{1}{\sqrt{(RC(2n - 1))^2 + 1}},$$

som krymper mot null når n vokser. Høye frekvenser dempes altså hardere enn lave, og det er akkurat det som gjør klarinettlyden rundere.

5 Amplituderesponsen er

$$\begin{aligned} |H(i\omega)| &= \left| \frac{1}{RCi\omega + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1 - RCi\omega}{(RC\omega)^2 + 1} \right| \\ &= \frac{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \end{aligned}$$

mens faseresponsen er

$$\begin{aligned} \arg(H(i\omega)) &= \arg\left(\frac{1}{RCi\omega + 1}\right) \\ &= \arg(1 - RCi\omega) - \arg((RC\omega)^2 + 1) \\ &= \arg(1 - RCi\omega) = -\arctan(RC\omega). \end{aligned}$$

(Merk minustegnet - H er et lavpassfilter, og et lavpassfilter forsinket signalet, så fasen skal være *negativ* og gå mot $-\pi/2$ (dvs. -90 grader) når $\omega \rightarrow \infty$, ikke positiv. Man kan skrive dette som $-\arccos(1/\sqrt{(RC\omega)^2 + 1})$ også, men da må minustegnet være med - ellers får man en fase som går mot $+\pi/2$ (dvs. $+90$ grader), altså et filter som *fremskynder* signalet, og det stemmer ikke med fysikken.)

6 Temperaturfirkantbølgen f har amplitude 20, men pådraget på høyresiden av likningen er $g = \alpha f$, med amplitude 20α :

$$g(t) \sim 20\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t} \right),$$

og difflikningen er

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = g(t).$$

Lapacetransformen til likningen er

$$sX - x(0) + \alpha X = G$$

så transferfunksjonen blir

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= ce^{-\alpha t} + 20\alpha \cdot \frac{1}{2}H(0) + \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H((2n+1)i\omega)}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t} \\ &= ce^{-\alpha t} + 10 + \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)((2n+1)i\omega + \alpha)} e^{(2n+1)i\omega t} \end{aligned}$$

(DC-leddet blir $H(0) \cdot 10\alpha = 10$ grader - middeltemperaturen mellom 20 og 0 grader, akkurat som man skulle forvente fysisk, og uavhengig av α . Bruker man isteden f (amplitude 20) som pådrag istedenfor g får man $10/\alpha$ her, som ikke er en temperatur uansett hva α er - et tegn på at noe er galt.) Krever vi $x(0) = 20$, får vi

$$c = 10 - \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)((2n+1)i\omega + \alpha)}$$

hva nå enn dette er.

Fourieromvending (fourier transform-delen):

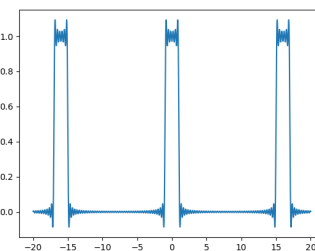
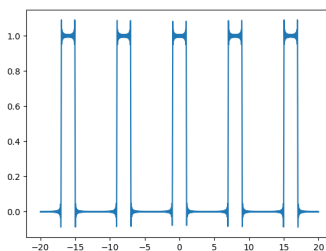
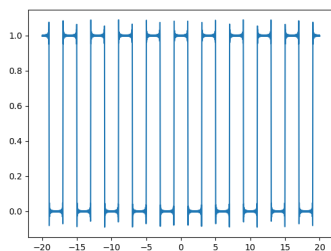
7 La $T > 2$. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{in\omega T} (e^{in\omega} - e^{-in\omega}) = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \end{aligned}$$

og $c_0 = 2/T$. Vi setter så sammen rekken, og får

$$\begin{aligned} y(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \cos(n\omega t) \right) \end{aligned}$$

Under er plot av en partialsum med de hundre første leddene for T lik 4, 8, og 16.



8 Vi beregner:

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}\end{aligned}$$

Denne kalles sinc-funksjonen og er veldig viktig i elektroteknikk. Merk likheten med fourierkoeffisientene fra forrige oppgave

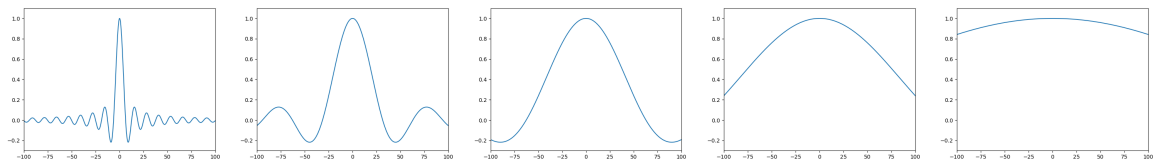
$$\frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}$$

der jeg har bytta navn fra ω til ω_0 for å poengtere at det at periodisk signal har en grunnfrekvens ω_0 og så dekomponeres signalet i heltallsmultipler av denne. I fouriertransform gir ikke konseptet "grunnfrekvens" noen mening lenger, for når signalet ikke er periodisk, må man fort ha alle frekvenser på den reelle akse for å rekonstruere signalet.

9 Denne blir ikke helt ulik den forrige:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1/2a}^{1/2a} ae^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-a}{i\omega} (e^{-i\omega/2a} - e^{i\omega/2a}) = \frac{\sin(\omega/2a)}{\omega/2a}\end{aligned}$$

Her er plot av denne for a lik 1, 5, 10, 20 og 50. Merk at når $a \rightarrow \infty$ går $\hat{x}$ mot 1 overalt. Dette har sammenheng med oppgave 11 under.

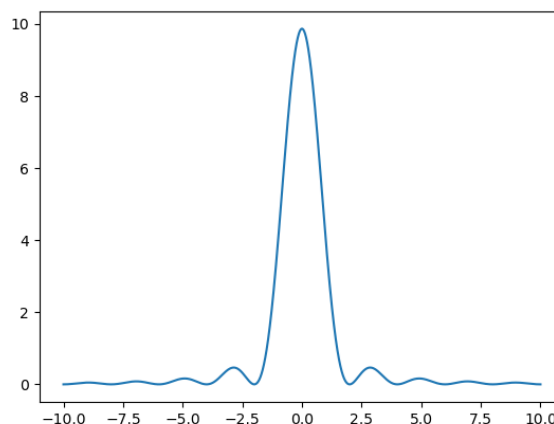


10 Trekantpulsen er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega\pi)) \end{aligned}$$



11 Lett!

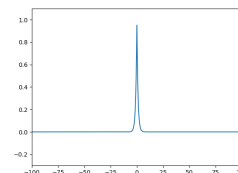
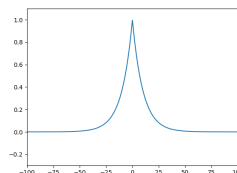
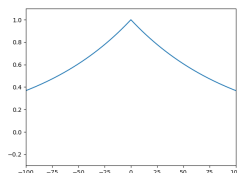
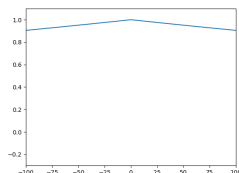
$$\hat{\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$$

Se på oppgave 9 over. Signalet

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$$

er en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på.

12 Denne funksjonen er også en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på. Her er plot for a lik 0.001, 0.01, 0.1 og 1:



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} e^{(a-i\omega)t} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} - \frac{1}{(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dette gir OGSÅ en heuristisk finfin måte å sette opp diracpulsen på når $a \rightarrow 0$.

- 13 Her bruker vi et skittent triks som vi ikke egentlig kan bruke. Men vi er ingeniører og eier ikke skam, så det går bra. I forrige oppgave regnet vi ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Fourierinversjon (med $1/2\pi$ -en - den er lett å glemme, men den må være med!) gir

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{a} e^{-a|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

Nå bytter vi navn på variablene, $t \leftrightarrow \omega$:

$$\frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{i\omega t} dt$$

og siden $1/(a^2 + t^2)$ er en jevn funksjon av t , spiller det ingen rolle om eksponenten er $e^{i\omega t}$ eller $e^{-i\omega t}$ (oddedelen av integranden integrerer uansett til null), slik at

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

(Fasiten $\frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$ er en velkjent tabellverdi - dobbeltsjekk gjerne mot en formelsamling. Glemmer du $1/2\pi$ -en i fourierinversjonen over, mister du en faktor 2π og ender opp med $\frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$ istedet, som er feil.)

- 14 Vi bruker samme triks som i oppgave 13, denne gangen med oppgave 8 som utgangspunkt. Fourierinversjon på

$$\hat{x}(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

(med x fra oppgave 8, rektangelpulsen) gir, for $|t| < 1$,

$$x(t) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad \Rightarrow \quad \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega,$$

mens for $|t| > 1$ er $x(t) = 0$, slik at det samme integralet blir 0. Bytter vi navn $t \leftrightarrow \omega$ (og bruker igjen at $\sin t/t$ er en jevn funksjon, slik at fortegnet i eksponenten ikke spiller noen rolle), får vi

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} \pi & |\omega| \leq 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

altså π ganger rektangelpulsen fra oppgave 8 - pent og symmetrisk, akkurat slik man forventer av et fourierpar.

- 15 I denne oppgaven må vi begynne å tenke litt på hva vi fourieromvender. Siden $e^{-i\omega t}$ alltid ligger på enhetssirkelen i det komplekse planet, ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt.$$

Med andre ord kan vi være sikker på integralet konvergerer dersom $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ er et tall og ikke uendelig. Vi sier i dette tilfellet at x er **absolutt integrerbar**, og du kan i bunn og grunn

tenke på x som en skalarmultippel av en sannsynlighetsfordeling. Vi kan nå delvisintegrere slik

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{x}\end{aligned}$$

siden

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0.$$

- 16 La $y(t) = x(t - \theta)$ Vi tar et trivielt variabelskifte, og beregner

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega(p+\theta)} dp \\ &= e^{-i\omega\theta} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p} dp = e^{-i\omega\theta} \hat{x}(\omega).\end{aligned}$$

- 17 La $y(t) = e^{i\theta t} x(t)$. Her er det ikke nødvendig med variabelskifte en gang:

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - \theta)t} dt = \hat{x}(\omega - \theta).\end{aligned}$$

- 18 La $y(t) = x(at)$ og la $a > 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = \frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

La så $y(t) = x(at)$ og la $a < 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = -\frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

Alt i alt kan vi skrive dette som

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{x}(\omega/a).$$

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Signalet er jevnt, så sinusdelen av $e^{-i\omega t}$ integrerer til null, og

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt \\ &= 2 \left. \frac{(1-t) \sin \omega t}{\omega} \right|_0^1 + \frac{2}{\omega} \int_0^1 \sin \omega t dt = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega) = \frac{4 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Sammenlikn med oppgave 10. Den siste formen er ingen tilfeldighet: trekanten er konvolusjonen av boksen med høyde 1 på $[-1/2, 1/2]$ med seg selv, og boksen har fourieromvending $2 \sin(\omega/2)/\omega$, så konvolusjonsteoremet fra økt 4 gir svaret med en gang.