14 - ELEKTROMAGNETISME

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme.[1] Han formulerte det som noen og tyve forskjellige regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til dette inhomogene differensiallikningssystemet noen år etter Maxwells originale publikasjon:

Gauss' lov: $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ **Gauss' lov for magnetisme:** $\nabla \cdot B = 0$

Faradays lov: $\nabla \times E = -\dot{B}$ **Amperes lov:** $c^2 \nabla \times B = \dot{E} + \frac{J}{\epsilon_0}$

For å forstå meningsinnholdet i disse trenger vi mer informasjon om nablaoperatoren.

I forrige uke løste vi bølge- og varmelikningen på et intervall på x-aksen - dette korresponderer til enten en vibrerende streng som er oppspent i to punkter eller en stang som kun leder varme i lengderetningen. Randkravene forteller hvor strengen er oppspent eller hva slags temperatur som er spesifisert i stangens endepunker. Hvis du hiver ut randkravene og heller sier at bølge- og varmelikningen skal løses på hele $\mathbb{R}$, må du gå litt annerledes til verks. Vi tar bølgelikningen først, for den er lettest. Bølgelikningen har mange løsninger; for eksempel passer

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

i bølgelikningen uansett hva v og w er så lenge begge er to ganger deriverbare.

$\boxed{7}$ Sjekk dette, og gi en fysisk tolkning.

Bølgelikningen på hele x-aksen trenger bare initialkrav - følgende er nok til å utlede en løsningsformel:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad \dot{u}(x,0) = g(x)$$

$\boxed{8}$ Bruk initialkravene og sett opp likningssystem for f og g. Gauss litt, integrer, og utled **D'Alemberts formel**[2]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

[2]

Newtons lov for viskositet

$$\sigma = \nu\,(\partial v + \nabla v)$$

kan virke trukket litt ut av hatten. For å forstå denne, trenger vi mye av det vi har lært i TMA4106 og TMA4111. Det første er å observere at vi kan skrive

$$\partial v = \frac{1}{2}\,(\partial v + \nabla v) + \frac{1}{2}\,(\partial v - \nabla v)\,.$$

Den første matrisen på høyre side er symmetrisk, mens den andre er **skjevsymmetrisk**.[3] Denne dekomponeringen har en pen fysisk tolkning. La oss først skrive opp taylorutviklikngen av første orden til v:

$$\begin{aligned} v(x+h,t) &\approx v(x,t) + (\partial_x v(x,t))h \\ &= v(x,t) + \frac{1}{2}\,(\partial v + \nabla v)\,h + \frac{1}{2}\,(\partial v - \nabla v)\,h. \end{aligned}$$

De tre leddene på høyre side gir oss ganske god informasjon om hva som skjer i området rundt x, i samme gate som ettpunktsformelen

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

gir oss informasjon om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i nærheten av x. Leddet $v(x,t)$ er "funksjonshøyden" i (x,t) og representerer den konstante delen av hastighetsfeltet som reiser forbi x. For å forstå Newtons viskositetslov må vi forstå den symmetriske delen

$$\frac{1}{2}\,(\partial v + \nabla v)\,h$$

og da er det lurt å først forstå den skjevsymmetriske delen

$$\frac{1}{2}\,(\partial v - \nabla v)\,h.$$

$\boxed{1}$ Kryssproduktet mellom to vektorer x og y kan skrives som et matrise-vektorprodukt

$$y \times x = Sx.$$

Hva blir S?

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Skew-symmetric_matrix

Vi skriver $S(y)$ for å indikere at det er y vi putter inn på rett måte i S. Rotasjonsmatrisen som roterer vektorer vinkelen θ rundt y kan skrives

$$R = I + S(y)\sin\theta + S^2(y)((1-\cos\theta))$$

dersom $|y| = 1$.

$\boxed{2}$ Sjekk dette.
(Hint: Rodrigues formel.)

Hvis jeg sier at n et heltall, og A en eller annen matrise, blir

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}A\right)^n.$$

Høyresiden her er slik man tenker på en generator for en liegruppe - man kjører et uendelig lite inkrement undelig mange ganger. Her kommer neste triks. Dersom $S(y)$ er skjevsymmetrisk, kan vi sjekke at

$$e^{\theta S(y)} = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{\theta}{n}S(y)\right)^n$$

er en rotasjon.

$\boxed{3}$ Sjekk at

$$e^{\theta S(y)} = I + S(y)\sin\theta + S^2(y)((1-\cos\theta))$$

dersom $|y| = 1$.

En rotasjon er altså sammensatt av uendelig mange bittesmå lineærtransformasjoner på formen

$$I + \frac{\theta}{n}S(y)$$

og derfor sier folk gjerne slike ting som at "rotasjoner er generert av skjevsymmetriske matriser" når de skal vise at de er en del av det laget i befolkningen som har peiling på **liegruppeteori**. [4] Liegrupper pleide å være et abstrakt leketøy kun tilgjengelig for de argeste, men er nå et standardverktøy innen reguleringsteknikk og kvantefysikk. Tidligere i semesteret regnet vi ut rotasjonen til hastighetsfeltet til en roterende skive, og fant at denne ble 2ω der ω er rotasjonshastigheten. Derfor skiller de mellom "rotation" og "curl" på engelsk, noe vi også burde gjort på norsk. Med Rodrigues' formel innabords kan vi belyse dette enda mer.

$\boxed{4}$ Hvilken rotasjon genereres av

$$\frac{1}{2}\left(\partial v - \nabla v\right)h?$$

[4] Oppkalt etter den norske matematikeren Sophus Lie:
Sophus Lie
døde i
en alder av nesten femtini.
Han døde av leukemi.
C'est la vie.

For å forstå friksjon i væsker må vi først forstå hva en **rigid avbildning**[5] er. Dette er kort og godt en avbildning som ikke endrer avstanden mellom punkter - dersom avstanden mellom to punkter er d før avbildningen, skal den også være d etter avbildningen.

5 Vis at en rotasjon er en rigid avbildning.

Det sier seg selv at det ikke oppstår friksjon i en væske som gjennomgår rigid bevegelse, for eksempel når du roterer et rømmebeger. Væskepartiklene må flytte seg relativt til hverandre. La oss analysere strømlinjene til et vektorfelt på formen

$$v(x) = Ax$$

der A er en matrise.

6 Hva blir strømlinjene dersom A er skjevsymmetrisk?
(Hint: Bruk forrige side.)

Det som gjenstår nå er å forstå hvorfor

$$\frac{1}{2}\left(\partial v + \nabla v\right) h$$

forteller oss noe om væskepartiklenes forflytning relativt til hverandre. En litt rask type ville nok nå sagt at siden translasjoner også er rigide bevegelser, endre leddet $v(x,t)$ i taylorutviklingen til v heller ikke avstanden mellom væskepartikler, så dersom avstanden mellom væskepartiklene endres over tid, er den symmetriske delen av ∂v som må stå for dette.

7 Hvordan blir strømlinjene til

$$v(x) = Ax$$

om A er symmetrisk?
(Hint: Legg koordinataksene langs egenvektorene til A.)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Rigid_transformation

UKENS NØTTER

Det finnes syv frisemønstre,[6] sytten tapetmønstre [7] og trettito krystallstrukturer.[8] Det matematiske objektet for å studere symmetri kalles gruppeteori.[9] En **gruppe** G er en samling elementer og en binær operasjon for å kombinere dem; Den binære operasjonen $\cdot$ skal være assosiativ, G skal være lukket under operasjonen, og G må inneholde

1 et identitetselement e slik at $g \cdot e = e \cdot g = g$ for alle $g \in G$.

2 et inverselement for alle $g \in G$, altså et element g^{-1} slik $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

En gruppe kan ha et endelig eller uendelig antall elementer. Tolvtonesystemet vi bruker i moderne musikk er basert på en endelig gruppe som heter $\mathbb{Z}_{12}$. Den består av elementene

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

og den binære operasjonen er

$$a + b \text{ mod } 12$$

som betyr "legg sammen a og b og trekk fra tolv gjentatte ganger til du får noe mellom 0 og 11". Denne kjenner dere alle, for det er den samme gruppen du bruker om du kan klokken. Hvis klokken er ti og du lurer på hva klokken er om femten timer, er svaret ett, for du tar ti pluss femten som blir tjuefem og så trekker du fra tolv to ganger.

$\boxed{1}$ Vis at dette er en gruppe.

Hvis du spiller et instrument, skjønner du kanskje at du kan identifisere tallene $0-11$ med intervallene, så en prim er null og en kvint er syv og så videre. Oktaven trenger du ikke ta med, for det er matematisk sett det samme som en prim. (Fysisk sett er oktaven en dobling av frekvens og ikke det samme som en prim, så her må vi tenke litt abstrakt og matematisk.)

$\boxed{2}$ Finn et sett med matriser som oppfører seg på samme måte under matrisemultiplikasjon.

Den enkleste måten å tenke på grupper på, er gjennom matrisemultiplikasjon, og dette er antagelig det eneste en typisk ingeniør trenger. Ganger du rotasjonsmatrisen med seg selv mange ganger, vil du bare få tolv forskjellige matriser dersom rotasjonsvinkelenvinkelen er $\pi/6$, og dette er matematisk sett identisk med klokkeslettene og tolvtonesystemet. Dette skulle Arnold Schönberg visst. Kanskje han kunne fått utløp for egoet sitt på andre måter enn å skrive musikk som ingen orker å høre på, og så kunne han skrevet mere Pelleas og Melisande istedet.

$\boxed{3}$ Hvis jeg sier at denne gruppen er rotasjonssymmetriene til et regulært polygon med tolv kanter, hva er da den korresponderende gruppen til et regulært polygon med seks kanter?

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)

Tolvtonesystemet, klokken, og alle rotasjonssymmetrier av det tolvkantede polygonet er "den samme gruppen". På fagspråket sier vi at de er **isomorfe**. Dette betyr at gruppene har den samme multiplikasjonstabellen: [10]

	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
PRIM	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
LITEN SEKUND	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM
STOR SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND
LITEN TERS	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND
STOR TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND	
KVART	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS
FORSTØRRET KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS	
KVINT	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS		
LITEN SEKST	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS			
STOR SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS		O	S	V
LITEN SEPTIM	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS					
STOR SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS						

	$R^0=I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
$R^0=I$	$R^0=I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
R	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12}=I$
R^2	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12}=I$	$R^{13}=R$
R^3	R^3	R^4										
R^4	R^4	R^5										
R^5	R^5	R^6										
R^6	R^6	R^7				O	S		V			
R^7	R^7	R^8										
R^8	R^8	R^9										
R^9	R^9	R^{10}										
R^{10}	R^{10}	R^{11}										
R^{11}	R^{11}											

[10] Å legge tre timer til et klokkeslett er strengt tatt en addisjon, men siden vi bruker · for den generiske binære operasjonen i gruppeteori, blir det fort til at man sier "multiplikasjonstabell" allikevel.

Du trenger ikke vite hva en oktav eller en sekund er i musikkteori for å forstå poenget. Dersom du klarer å se forbi merkelappene i tabellen over og oppdage at det er den samme strukturen, er du i boks. Så langt har vi egentlig kun studert en gruppe, $\mathbb{Z}^{12}$, men det var lett å diske opp med fire forskjellige tolkninger eller bruksområder. Alle disse bruksområdene oppfører seg helt likt, og gruppen $\mathbb{Z}^{12}$ er den matematiske fellesnevneren. La oss nå se på noen grupper med tolv elementer som oppfører seg litt annerledes.

$\boxed{4}$ Om jeg sier at det sekskantede polygonet i oppgaven over kan speiles i tillegg til å roteres, hvordan ser gruppen ut da?
(Hint: Tenk at hjørnene er nummererte og at du skal finne et sett med matriser som flytter rundt på dem på alle mulige måter på en slik måte at polygonet hadde sett likt ut om hjørnene var unummerte.)

Fikk du til oppgaven over, vil du forhåpentligvis forstå at det er noen fundamentale forskjeller på denne gruppen og $\mathbb{Z}^{12}$.

$\boxed{5}$ Hva med alle symmetriene til et regulært tetraeder?

$\boxed{6}$ Hva med alle permutasjoner på $(1, 2, 3, 4)$?
(En permutasjon er for eksempel $(1, 4, 3, 2)$. Hvor mange finnes det?)

$\boxed{7}$ Legg et regulært tetraeder slik at det har hjørner i $(1, 1, 1)^T$, $(-1, -1, 1)^T$, $(1, -1, -1)^T$ og $(-1, 1, -1)^T$ og skriv opp et sett med matriser som er isomorft til symmetrigruppen.

For å komme frem til det som er interessant, må vi skjønne hva en **generator** er. Dette er et sett med elementer i gruppen som gir deg alle elementene i gruppen dersom du ganger dem sammen gjentatte ganger. Tolvtonesystemet og rotasjonssymmetriene til den tolvkantede platen er såkalt **sykliske** - du trenger bare én generator. For tetraederet trenger du fler.

$\boxed{8}$ Finn generatorerer for rotasjonsymmetriene til den tolvkantede platen og symmetrigruppen til tetraederet. Og tolvtonesystemet om du liker musikk for den saks skyld, men har du funnet generator for symmetriene til den tolvkantede platen, har du for tolvtonesystemet også.

Har du skjønt hva en generator for en endelig gruppe er, er det ikke så vanskelig å gjøre et hopp i hugen og forstå hvorfor en rotasjon er "generert" av en skjevsymmetrisk matrise.

$\boxed{9}$ Finn generatorer for rotasjon rundt de kartesiske koordinataksene. Disse rotasjonene kalles roll, pitch og yaw (e_1 er fartøyets fartsretning og e_3 er opp):

$$e^{\theta S(e_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_2)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matematisk sett er det ikke forskjell på posisjonen $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ og tiden t, men vi må skille dem på grunn av fysikken. For å indikere tidsderivert, kommer jeg til å bruke den gode gamle newtonprikken

$$\dot{f}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, t + h) - f(x, t)}{h}$$

og ∇-operatoren tar vi kun på de romlige koordinatene.

$\boxed{0}$ La $f(x,t) = x_1 x_2 + x_3 t$. Finn $\dot{f}$ og ∇f.

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme.[11] Han formulerte det som noen og tyve forskjellige regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til dette inhomogene differensiallikningssystemet noen år etter Maxwells originale publikasjon:

Gauss' lov: $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

Gauss' lov for magnetisme: $\nabla \cdot B = 0$

Faradays lov: $\nabla \times E = -\dot{B}$

Amperes lov: $c^2 \nabla \times B = \dot{E} + \dfrac{J}{\epsilon_0}$

De elektriske og magnetiske feltene er ukjente funksjoner fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$ (feltstyrke), Ω er et område i $\mathbb{R}^3$ med rand $\partial\Omega$, og Σ er en flate i $\mathbb{R}^3$ med randkurve $\partial\Sigma$. Strømtettheten er en gitt funksjon fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}$, mens strømtettheten går fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$.

Det elektriske feltet E og **det magnetiske feltet** B er de ukjente, mens **ladningstettheten** ρ og **strømtettheten** J er gitte funksjoner. Permittitiviteten i vakuum ϵ_0 kjenner vi fra før, og c er lyshastigheten i vakuum. Vi skal utlede forskjellige konsekvenser av Maxwells lover. La oss begynne med en viktig anvendelse av teoremene vi har lært i begynnelsen av semesteret.

$\boxed{1}$ La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ og Σ en flate i $\mathbb{R}^3$. Utled Maxwells lover på integralform:

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dx \qquad \int_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \cdot dS \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} E \cdot dS$$

Hvis du ikke har vendt deg til den nye minimalistiske notasjonen for kurve-, flate- og trippelintegraler, kan du skrive Maxwells lover slik:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx \qquad \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

Det er en god strategi å alltid starte med å gjøre så mange forenklinger som mulig når man skal studere noe nytt og komplisert. I elmag pleier man å begynne med to forenklende antakelser for å komme igang. Den første er at feltene er **statiske**, altså at de ikke avhenger av t:

$$\dot{E} = 0 \qquad\qquad \dot{B} = 0$$

Den andre antagelsen er at vi er i **tomt rom**, altså ingen ladnings- eller strømtetthet:

$$\rho = 0 \qquad\qquad J = 0$$

La oss anta statiske felter men ikke tomt rom. Da får vi et dekoblet likningssett:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad\qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = 0 \qquad\qquad c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0}$$

Studiet av de to likningene for E kalles **elektrostatikk**,[12] mens studiet av de to for B kalles og **magnetostatikk**[13] Det elektriske feltet er et sirkulasjonsfritt vektorfelt med en gitt divergens, mens magnetfeltet er et divergensfritt felt med en gitt sirkulasjon. La oss begynne med E.

$\boxed{3}$ Forklar at det elektriske feltet er konservativt og at potensialet tilfredsstiller Poissons likning.

Det er faktisk slik at Gauss' lov og antagelsen om sfærisk symmetri impliserer coloumbs uttrykk for det elektriske feltet fra en punktladning.

$\boxed{4}$ Utled at feltstyrken til en punktladning må gå som $1/r^2$ fra Gauss' lov på integralform.

Nå ser vi litt på B. Dette er noe mer komplisert. Så vidt man vet, finnes det ingen magnetisk monopol,[14] altså ingen magnetisk punktladning.

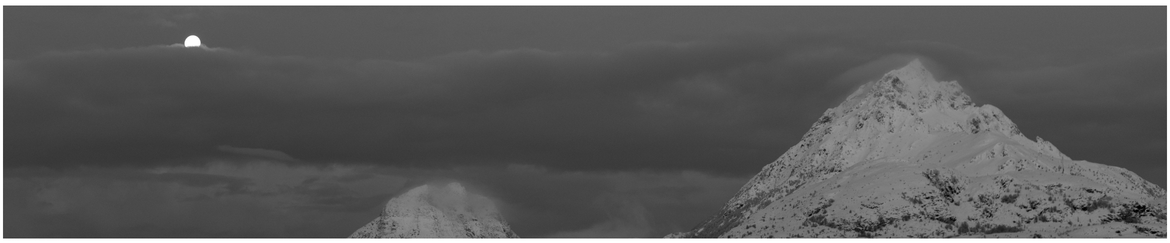
$\boxed{5}$ Vis dette.

På samme måte som for den elektriske punktladningen, kan vi utlede at den magnetiske feltstyrken rundt en lang strømførende ledning med konstant strømstyrke må gå som $1/s$.

$\boxed{6}$ Vis dette ut fra Amperes lov på integralform og antagelsen om radiell symmetri.

Elektrostatiske felter er en harmoniske funksjoner i tomt rom. En liknende påstand er sann for magnetostatiske felter, men det er litt mer komplisert siden det er divergensen og ikke sirkulasjonen som er null.

$\boxed{7}$ Vis at B har divergensfritt vektorpotensiale der komponentene tilfredsstiller Poissons likning.



[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetostatics

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_monopole

Så vidt jeg vet var det omtrent slik Maxwell oppdaget at synlig lys er elektromagnetiske bølger. Han visste ikke i utgangspunktet at c var lyshastigheten i disse likningene, men eksperimentelle målinger gav verdier som lå påfallende nært til lyshastigheten. [15] La oss nå skru på tomt rom, men av antagelsen som statiske felter:

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad \nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times E = -\dot{B} \qquad c^2 \nabla \times B = \dot{E}$$

Tar vi laplaceoperatoren på et vektorfelt, mener vi på hver komponent slik: $\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ Utled bølgelikningene $\ddot{E} = c^2 \Delta E$ og $\ddot{B} = c^2 \Delta B$.

Når man skal overføre elektrisk energi med høy frekvens er det upraktisk å bruke ledninger, for man søler den elektriske energien ut i rommet og så lages det returstrømmer og fandens oldemor. Derfor er det vanlig å overføre elektrisk energi på høy frekvens gjennom hule kanaler med stående elekriske bølger. Disse kalles **bølgeledere**. [16] I populærvitenskapelige fremstillinger av elektromagnetiske bølger er E - og B - feltene tegnet som ortogonale på hverandre og på propagasjonsretningen. Dette gjelder kun i tomt rom.

$\boxed{9}$ Vis at dersom bølgefunksjonene $E(x, t) = E_0 e^{i(k \cdot x - ct)}$ og $B(x, t) = B_0 e^{i(k \cdot x - ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene E_0, B_0 og k være innbyrdes ortogonale.

$\boxed{1}$ Vis at dalembertoperatoren er invariant under lorentzboosts.

[15] Første gang målt av Ole Rømer ved å studere rare avvik i tabellene for når Jupiters måner kommer ut av Jupiters skygge.

[16] Se her: `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html`
Du kan faktisk lage en kondensator av en hul sylinder: `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html`