13 - NABLAOPERATOREN

Jacobimatrisen til $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ er

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Fordelen med denne er at mange formler du lærte på skolen, for eksempel kjerneregelen

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = g'\left(f(x)\right) f'\left(x\right)$$

eller ettpunktsformelen

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

er identiske for funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ så lenge du tolker produktene som matriseprodukter. **Gradienten**[1] til skalarfeltet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skrives

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

og tar vi gradienten på $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mener vi den transponerte av jacobimatrisen. Nablasymbolet alene kalles en **operator**:[2]

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Fordelen med tenke på nablaoperatoren som en operator er at den kan settes sammen med prikk- og kryssproduktet.

$\boxed{0}$ La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Finn $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient`

[2] I funksjonalanalyse er de veldig opptatt av om operatoren er glatt. (`https://www.youtube.com/watch?v=4TYv2PhG89A`).

Divergensen[3] til et vektorfelt er sporet[4] til jacobimatrisen:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Denne forteller oss noe om vektorfeltets ekspansjon i punktet x. **Rotasjonen**[5] er:

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

I dette kurset skal vi bli bedre kjent med disse. Finn ∇f, $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$ når $f(x)$ er

$\boxed{1}$ $(x_1, x_2, x_3)^T$. $\boxed{2}$ $(x_2, x_3, x_1)^T$ $\boxed{3}$ $(x_3, x_1, x_2)^T$.

$\boxed{4}$ $(x_3, x_2, x_1)^T$. $\boxed{5}$ den laminære vannstrømmen $(x_3, 0, 0)^T$ $\boxed{6}$ coloumbfeltet.

I de klassiske fysikkmodellene dukker det gjerne opp kombinasjoner av gradient, divergens og rotasjon. La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Regn ut:

$\boxed{7}$ $\nabla \cdot (\nabla f)$ $\boxed{8}$ $\nabla \times (\nabla f)$ $\boxed{9}$ $\nabla(\nabla \cdot g)$ $\boxed{10}$ $\nabla \cdot (\nabla \times g)$ $\boxed{11}$ $\nabla \times (\nabla \times g)$

Den første av disse kjenner du fra før, nemlig **laplaceoperatoren**:

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

og dersom $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skriver vi

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}.$$

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_(linear_algebra)
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)

I fysikklitteratur er det tre basiser for $\mathbb{R}$ som brukes jevnlig - den kartesiske du er vant til, samt **sylinderkoordinatbasisen** og **kulekoordinatbasisen**. Basisvektorene i de to siste peker i bestemte retninger knyttet til radiene og vinklene i de sylinder- og kulekoordinatsystemene, og de kan være litt forvirrende i starten siden basisvektorene endres etter hvor i $\mathbb{R}^3$ man befinner seg.[6] Det finnes også mer avanserte koordinatsystemer, men de får ikke vi bruk for.[7] I dette kurset skal vi bruke e med en subskript for å indikere forskjellige enhetsvektorer:

e_k : Standardbasiselement k i $\mathbb{R}^3$.

e_φ : Rett sør på en kuleflate sentert i origo.

e_θ : Rett øst på samme kuleflate.

e_r : Sett θ og φ og gå kulekoordinatradielt ut fra origo.

e_s : Sett θ og gå sylinderkoordinatradielt ut fra e_3.

e_n : Normalvektor til en flate, utnormal om flaten er lukket.

$\boxed{12}$ Sett opp eksplisitte uttrykk for disse.
(Hint: Bruk jacobimatrisene til kule- og og sylinderkoordinattransformasjonene.)

$\boxed{13}$ Fordelen med disse alternative basisene er at noen ting blir lettere å skrive opp. Skriv opp coloumbfeltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}$$

i kulekoordinatbasisen.

Det er praktisk med notasjon for alle disse vektorene, for vi får kompakt notasjon. For eksempel kan rotasjonen skrives

$$\nabla \times f = \left(e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3)$$

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_coordinate_system

Til slutt et viktig poeng om notasjon under koordinatskift. La oss ta det elektriske feltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}$$

fra en punktladning som eksempel. Til nå har jeg slurvet litt og brukt bokstaven E både for den elektriske feltstyrken og for den matematiske funksjonen som gir den elektriske feltstyrken gitt x. Hvis vi er interessert i å finne hvordan E varierer med r, θ eller ϕ er det fristende å skrive

$$E(r,\theta,\phi) \qquad \frac{\partial E}{\partial r} \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial E}{\partial \phi}.$$

Men dette er litt skummelt, for strengt tatt er

$$E(r,\theta,\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(\sqrt{r^2+\theta^2+\phi^2}\right)^3}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

men det vi åpenbart er ute etter, er jo

$$E(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}e_r$$

som er noe helt annet. Det helt klart ryddigste er å reservere E til den elekriske feltstyrken, som er en målbar fysisk størrelse, og så bruke egne bokstaver for de forskjellige matematiske funksjonene:

$$E = f(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3} \qquad\qquad E = f(g(r,\theta,\phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}e_r$$

Dette gjøres nesten aldri i praksis, og i en fysikkbok vil det typisk bare stå

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_3} \qquad \frac{\partial E}{\partial r} \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial E}{\partial \phi}$$

om hverandre. Dette er nok én av hovedgrunnene til at elmag og termo og annen fysikk med flere uavhengige variable er vanskelig å forstå i starten. I termo kan de fint skrive både

$$U = U(S,V) \qquad \text{og så plustelig} \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p$$

på neste linje. Det glade vanvidd spør du meg. Men skulle man alltid vært nøye på å gi de forskjellige funksjonene hver sin bokstav hadde det også blitt forferdelig mange bokstaver å holde styr på, så derfor har man endt opp med å bruke samme bokstav til både den fysiske størrelsen og virvaret av funksjoner mellom den og andre fysiske størrelser. Dette er viktig å vite om i starten, slik at man kan holde tungen beint i munnen. La oss ta en treningsoppgave.

$\boxed{14}$ Du har tidligere funnet

$$E'(x) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \frac{\partial E}{\partial x_3}\right).$$

Finn

$$E'(r,\theta,\phi) = \left(\frac{\partial E}{\partial r}, \frac{\partial E}{\partial \theta}, \frac{\partial E}{\partial \phi}\right).$$

Nå har jeg bevisst misbrukt notasjon. Bruk kjerneregelen på

$$E = h(r,\theta,\phi) = f(g(r,\theta,\phi)).$$

der g er er kulekoordinatfunksjonen. Sett også inn og ta det på direkten og dobbeltsjekk svaret.

Løsningen til Laplaces likning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

på rektangelet $[0, \pi] \times [0, \pi]$ med randkrav

$$u(x_1, 0) = u(0, x_2) = u(\pi, x_2) = 0$$

og

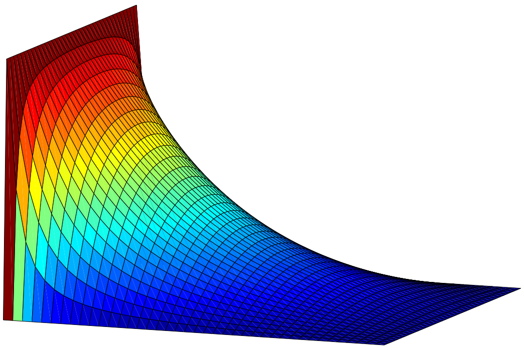
$$u(x_1, \pi) = f(x_1).$$

er

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh nx_2 \sin nx_1,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$



Stasjonær varmeflyt, $f(x) = 1$.

Dette kunne vi regna ut i TMA4106, men det var så mange andre liknende ting der og kurset var stort og hardt nok, så jeg gadd ikke ta det med. Laplaceoperatoren

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

for skalarfelt og divergensen

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

til vektorfelt er i slekt med hverandre og dukker opp så ofte i fysikk at vi bør ta en økt om dem. Vi må nesten se hvordan de dukker opp i anvendelser før vi går videre.

$\boxed{0}$ Skriv opp begge versjonene av Greens teorem dersom $f = \nabla u$ der u er et skalarfelt av to variable. Hva blir fluksen ut av Ω dersom u er en harmonisk funksjon?

Den andre versjonen

$$\iint_\Omega \nabla \cdot f = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, ds$$

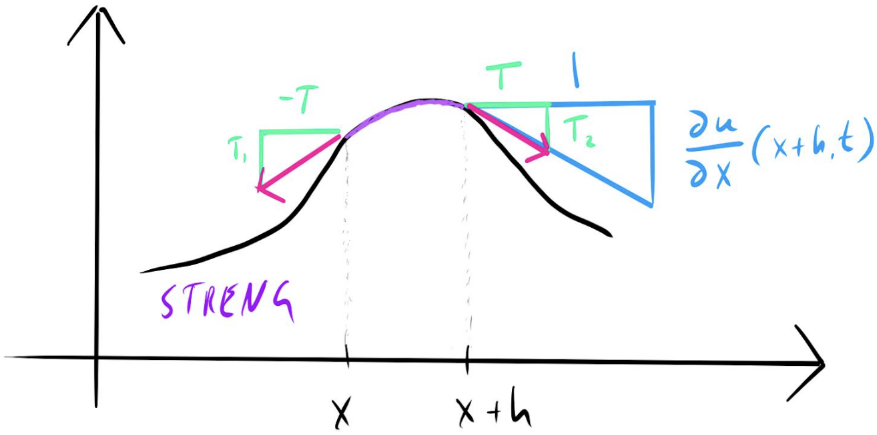
av Greens teorem blir

$$\iint_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot e_n \, ds$$

dersom $f = \nabla u$. Den retningsderiverte $\nabla u \cdot e_n$ dukker opp så ofte at det er smart å ha en egen notasjon:

$$\frac{\partial u}{\partial e_n} = \nabla u \cdot e_n$$

Når vi studerte den første versjonen av Greens teorem, tolket vi f som kraft, og i den andre versjonen tolket vi f som flyt. Nå skal vi utlede bølgelikningen for en vibrerende membran ved å kombinere tolkningen av f som kraft med den andre versjonen. La oss først repetere bølgelikningen for en streng.



Vi antar at den horisontale strekkraften T (i newton) er lik overalt, slik at molekylene i den lille lilla biten av strengen kun beveger seg rett opp og ned, ikke frem og tilbake. Dette betyr at massen til den lilla biten er ρh dersom massetettheten ρ er gitt i kilo per meter. Netto vertikal kraft på biten er $T_1 + T_2$, så Newtons andre lov $F = ma$ gir

$$T_1 + T_2 = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

der $u(x, t)$ er høyden over likevekt. Siden dekomponeringen av strekkraften danner en trekant som er kongruent med trekanten som gir stigningstallet til u med hensyn på x, kan vi skrive

$$T_1 + T_2 = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right),$$

og hvis vi deler Newtons andre lov på h og lar $h \to 0$, får vi bølgelikningen for en streng:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Strekkraften på en streng måles i Newton. På gitarstrengpakken står strengestrekket oppgitt i kilo, for strengens stramhet kan sammenlignes med stramheten du får ved å henge et lodd på den. For et membran må vi egentlig ha en ide om noe som kalles **spenningstensoren**.[8] Dette er en matrise som i hvert punkt angir **spenningene**[9] i et materiale under last. I tre dimensjoner måles disse i Pascal[10] men siden vi har et membran, er det enklere å neglisjere tykkelsen og tenke kraft per meter. Vi skal anta at det finnes en horisontal spenning T som er isotrop og konstant og at den ikke endres når membranet strekkes, analogt til den horisontale strekkraften i forrige utledning.

$\boxed{1}$ Utled bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn.
(Hint: Se på en liten bit Ω av membranen, finn kraften på Ω langs $\partial\Omega$, bruk det samme kongruenstrikset som for strengen, og avslutt med Greens teorem.)

Hvis vi nå går tilbake til å tenke flyt, kan vi også utlede varmelikningen med hjelp fra Greens teorem og Fouriers varmelov

$$q = -\kappa \nabla u$$

der q er varmefluksen u er temperaturen og κ en fysisk konstant som kalles den termiske konduktiviteten.[11] Tenk at du har en plate som er dekket av Glava over og under, slik at varme kun kan strømme langs med platen.

$\boxed{2}$ Utled varmelikningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right).$$

Vi kan også legge en stein på et trommeskinn. Denne gir et trykk p (målt i pascal) på skinnet.

$\boxed{3}$ Utled Poissons likning

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

for et trommeskinn i ro med horisontalt strekk T og trykk p.

$\boxed{4}$ Laplaces likning $\Delta u = 0$ dukker opp som spesialtilfelle av alle disse, på litt forskjellige måter. Hvordan?

$\boxed{5}$ Vis at laplaceoperatoren er **rotasjonsinvariant**, altså at de rene partiellderiverte summerer til det samme også om du roterer koordinatsystemet. I tre dimensjoner.

$\boxed{6}$ La Ω være en sirkelskive med radius r, sentrert i x. Vis at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u \, ds = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\Omega} u$$

dersom u er harmonisk på et område som inneholder Ω.

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor`
[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)`
[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_(unit)`
[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conductivity_and_resistivity`

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Utled oppgave 6 fra Cauchys integralformel.

$\boxed{2}$ Finn uttrykket for trommeskinnet på bildet under.
(Hint: Anta at skinnet har beholdt sin sirkulære form sett ovenfra.)

Takk til Lars i TSO for fuktskadd skarptrommeskinn med form ikke helt ulik $f(x) = x_1 x_2$.