

13 - FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE IV - LF

- 1 Vi later som om ∇ er en vanlig vektor og regner ut prikk- og kryssproduktet med f , med den regelen at en partiellderivert virker på det som står til høyre for den:

$$\nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

og

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Det første er et skalarfelt og det andre et vektorfelt, og begge er satt sammen av de ni partiellderivate i jacobimatrisen: divergensen er summen langs diagonalen, altså sporet, mens rotasjonen er de seks utenfor diagonalen parvis trukket fra hverandre - det som overlever når du trekker den transponerte fra ∇f . Er jacobimatrisen symmetrisk, er rotasjonen null. Rekkefølgen er ikke likegyldig, for ∇ deriverer alt som står til høyre for seg: $f \cdot \nabla$ er ikke et tall, men en ny operator $f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ som venter på noe å derivere.

- 2 Her er $f(x) = x$, så jacobimatrisen er identitetsmatrisen:

$$\nabla f = I \quad \nabla \cdot f = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \nabla \times f = 0.$$

Divergensen er sporet til jacobimatrisen, og sporet til I er 3. Feltet peker rett ut fra origo overalt, så det er ren ekspansjon og ingen rotasjon - tenk en gass som utvider seg jevnt i alle retninger. At divergensen ble akkurat 3 er ingen tilfeldighet: det er dimensjonen. I planet ville det samme feltet hatt divergens 2.

- 3 Nå er

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \cdot f = 0 \quad \nabla \times f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Divergensen er null fordi diagonalen i jacobimatrisen er null: hver komponent av f avhenger bare av *andre* variable enn sin egen. Rotasjonen regner vi ut rett fra formelen, for eksempel

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 0 - 1 = -1,$$

og de to andre komponentene går likedan.

- 4 Dette er den andre sykliske ombyttingen, og alt snur fortegn:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \cdot f = 0 \quad \nabla \times f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen i denne og forrige oppgave er transponerte av hverandre, og siden divergensen bare ser diagonalen mens rotasjonen bare ser den antisymmetriske delen, får de samme divergens og motsatt rotasjon. Legg merke til at rotasjonen peker langs $(1, 1, 1)^T$. Det er ikke tilfeldig: begge disse matrisene er ortogonale med determinant 1, altså rotasjoner på 120 grader, og de roterer nettopp om diagonalen $(1, 1, 1)^T$, som er den eneste retningen en syklisk ombytting lar være i fred.

5

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \cdot f = 1 \quad \nabla \times f = 0.$$

Her er jacobimatrisen *symmetrisk*, og da må rotasjonen bli null, for rotasjonen plukker ut nettopp den antisymmetriske delen. Symmetrisk jacobimatrise er også et varsku om at feltet er en gradient, og ganske riktig er

$$f = \nabla \left(x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{2} \right).$$

Sammenlikn med oppgave 9: gradientfelt roterer aldri.

6

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \cdot f = 0 \quad \nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Divergensen er null - vann er inkompressibelt, det hoper seg ikke opp noe sted. Men rotasjonen er *ikke* null, og dette er verdt å stoppe litt ved, for det er her de fleste går i baret første gang. Strømlinjene er jo helt rette: alt vann beveger seg pent i x_1 -retningen og svinger ingen steder. Likevel roterer feltet. Grunnen er at vannet lenger oppe går forttere enn vannet lenger nede, så slipper du et lite skovlhjul ned i strømmen, får det mer futt på oversiden enn på undersiden og begynner å spinne. Rotasjon handler om lokal skjærspinn i væsken, ikke om hvorvidt strømlinjene krøller seg.¹

7 Skriv $k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ og $r = |x|$, slik at $f(x) = k \frac{x}{r^3}$. Siden $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, er

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{r^3} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5},$$

altså

$$\nabla f = k \left(\frac{1}{r^3} I - \frac{3}{r^5} x x^T \right).$$

Denne er symmetrisk, så $\nabla \times f = 0$ med en gang, og det måtte den være, for

$$f = -k \nabla \frac{1}{r}$$

er en gradient. Divergensen er sporet, og siden $\text{tr } I = 3$ og $\text{tr } x x^T = |x|^2 = r^2$, blir

$$\nabla \cdot f = k \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) = 0 \quad \text{for } x \neq 0.$$

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Vorticity>

Dette er hele poenget med coloumbfeltet: det har ingen kilder noe sted *unntatt* i origo, der ladningen sitter, og der er feltet ikke definert i det hele tatt. Regner man litt mer forsiktig, i distribusjonsforstand, finner man at $\nabla \cdot f$ er en diracpuls i origo med vekt q/ϵ_0 , og det er nettopp Gauss' lov.²

8

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \Delta f,$$

altså laplaceoperatoren, som du kjenner fra før. Divergensen av gradienten: først finner du hvilken vei det bærer nedover, så spør du om det pilene peker på sprer seg eller samler seg. Er $\Delta f > 0$ i et punkt, ligger f lavere der enn i nabolaget rundt.

9 Denne blir null:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix} = 0,$$

for blandede annenderiverte er like uansett rekkefølge så lenge f er to ganger kontinuerlig deriverbar.³ Fysisk sier dette at et gradientfelt aldri virvler. Et kraftfelt som er en gradient kalles **konservativt**, og det er nettopp derfor du ikke kan bygge en evighetsmaskin av tyngdekraften: du kommer aldri rundt en løkke med netto arbeid.

10 Her skjer det ikke noe magisk - dette er bare et vektorfelt:

$$\nabla (\nabla \cdot g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix}.$$

Legg merke til at dette *ikke* er Δg : her deriverer vi g_2 og g_3 med hensyn på x_1 i førstekomponenten, mens Δg bare deriverer g_1 der. De to henger likevel sammen, og forbindelsen kommer i oppgave 12. Tolkningen er grei nok: $\nabla \cdot g$ måler hvor det er kilder, og gradienten av det peker mot der kildene blir sterkere.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's_law

³Dette er Schwarz' (eller Clairauts) teorem, og det er ikke gratis: for funksjoner som ikke er pene nok spiller rekkefølgen faktisk en rolle.

https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_of_second_derivatives

11 Vi tar rotasjonen først,

$$\nabla \times g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

og så divergensen av den:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times g) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_3 \partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

I det andre steget sorterte jeg de seks leddene etter hvilken komponent av g de deriverer, og da står de parvis som blandede annenderiverte i motsatt rekkefølge. Slike er like, jf. oppgave 9, så alt kansellerer.

Dette er tvillingen til oppgave 9. Begge sier egentlig det samme: nabla "kryssa med seg selv" gir null, akkurat som $a \times a = 0$ for en vanlig vektor, og det er bare symmetrien i de blandede deriverte som får det til å gå opp.

Fysisk sier $\nabla \cdot (\nabla \times g) = 0$ at et rotasjonsfelt hverken har kilder eller sluk - feltlinjene lukker seg om seg selv. Det er hele grunnen til at magnetfeltet tilfredsstiller $\nabla \cdot B = 0$: man kan skrive $B = \nabla \times A$ for et vektorpotensial A , og da følger det gratis at det ikke finnes magnetiske monopoler.⁴ Det omvendte holder også på snille områder: er $\nabla \cdot F = 0$, så finnes det en A med $F = \nabla \times A$.

12 Denne er den eneste av de fem som ikke kollapser til noe kjent, men den lar seg skrive om. Vi tar førstekomponenten. Med $c = \nabla \times g$ er

$$\begin{aligned} (\nabla \times c)_1 &= \frac{\partial c_3}{\partial x_2} - \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_3^2}. \end{aligned}$$

Nå legger vi til og trekker fra $\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}$, som er det eneste leddet som mangler for å få to pene grupper:

$$\begin{aligned} (\nabla \times c)_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) g_1 \\ &= (\nabla (\nabla \cdot g))_1 - (\Delta g)_1. \end{aligned}$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_vector_potential

De to andre komponentene går helt likedan, så

$$\nabla \times (\nabla \times g) = \nabla (\nabla \cdot g) - \Delta g.$$

Dette er antakelig den mest brukte vektoridentiteten i all fysikk. Tar du rotasjonen av Faradays lov og setter inn Ampères lov, er det nøyaktig denne som gjør Maxwells likninger om til bølgelikningen og forteller deg at lys finnes.⁵ Merk også at den kan brukes baklengs som en *definisjon* av Δg for vektorfelt i andre koordinatsystemer enn det kartesiske, der "komponentvis laplace" ikke er så uskyldig som det ser ut.

- 13 Trikset er at søylene i jacobimatrisen til koordinattransformasjonen peker nettopp i de retnin-
gene vi er ute etter: deriverer du posisjonen med hensyn på én koordinat og holder de andre
fast, får du fartsvektoren til kurven du følger når du skrur på akkurat den koordinaten. Da er
det bare å normere.

Kulekoordinatene er⁶

$$x = g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

og de tre søylene i g' blir

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

med lengder henholdsvis 1, $r \sin \varphi$ og r . Normerer vi, får vi

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Sylinderkoordinatene er $x = (s \cos \theta, s \sin \theta, x_3)^T$, og samme regning gir

$$e_s = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

mens e_θ blir nøyaktig den samme som over - de to systemene deler østretning. Standardbasen e_k er som vanlig, og e_n er ikke gitt av noe koordinatsystem i det hele tatt, men av flaten du ser på; for en kuleflate sentrert i origo er $e_n = e_r$.

Tre ting er verdt å merke seg. For det første er de tre kulekoordinatvektorene ortonormale, og $e_r \times e_\varphi = e_\theta$, så $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$ er høyrehendt i den rekkefølgen. For det andre stemmer navnene: e_φ peker rett sør, siden φ måles ned fra nordpolen, og e_θ peker rett øst. For det tredje er

$$e_s = \sin \varphi e_r + \cos \varphi e_\varphi,$$

som du kan lese rett av figuren: går du rett ut fra e_3 -aksen, går du delvis utover og delvis sørover. Og til slutt det viktigste: disse vektorene er funksjoner av hvor du er. e_r i Trondheim og e_r i Melbourne peker stikk motsatt vei. Det er nettopp derfor det blir ekstra ledd når man deriverer i kulekoordinater, jf. oppgave 15.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_wave_equation

⁶I 13.tex er den samme vinkelen skrevet ϕ noen steder og φ andre steder. Det er samme vinkel: avstanden ned fra nordpolen.

- 14 Vi skal skrive E ved hjelp av e_r istedenfor x . Siden $|x| = r$ og $x = re_r$, er

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{re_r}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r.$$

Det er verdt å stoppe opp og se hvor mye penere dette er. I kartesiske koordinater trengte vi tre komponenter som alle inneholdt en $|x|^3$, og det var ikke lett å se noe som helst. Nå står det ett tall ganger én basisvektor, og både at feltet peker rett ut fra ladningen og at styrken går som $1/r^2$ kan leses direkte av uttrykket. Den berømte invers-kvadrat-loven var der hele tiden, men den var gjemt bak notasjonen.

Merk at det er r^2 og ikke r^3 i nevneren: de tre r -ene i $|x|^3$ spiser opp den ene r -en som ligger i x selv.

- 15 La $h = f \circ g$, der g er kulekoordinatfunksjonen fra oppgave 13. Kjernerregelen sier $h' = f'(g) g'$, så vi trenger begge jacobimatrissene. Fra oppgave 7 har vi, med $k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$,

$$f'(x) = k \left(\frac{1}{r^3} I - \frac{3}{r^5} x x^T \right),$$

og fra oppgave 13 har g' søylene e_r , $r \sin \varphi e_\theta$ og re_φ . Nå gjør vi det lure og ganger f' på hver søyle for seg. Siden $x = re_r$ er $x^T e_r = r$, mens $x^T e_\theta = x^T e_\varphi = 0$, og derfor

$$f'(x)e_r = k \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) e_r = -\frac{2k}{r^3} e_r$$

$$f'(x)e_\theta = \frac{k}{r^3} e_\theta$$

$$f'(x)e_\varphi = \frac{k}{r^3} e_\varphi.$$

Ganger vi inn lengdene fra søylene i g' , blir svaret

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{2k}{r^3} e_r \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{k \sin \varphi}{r^2} e_\theta \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{k}{r^2} e_\varphi.$$

Så til dobbeltsjekken, som er hele poenget med oppgaven. Tar vi det på direkten fra oppgave 14, er $E = \frac{k}{r^2} e_r$, der e_r ikke avhenger av r , men av θ og φ . Deriverer vi rett fra uttrykkene i oppgave 13, får vi

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \sin \varphi e_\theta \quad \frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = e_\varphi,$$

og produktregelen gir

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{2k}{r^3} e_r \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{k}{r^2} \sin \varphi e_\theta \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{k}{r^2} e_\varphi,$$

som er nøyaktig det samme. Fint.

Moralen, og grunnen til at jeg maste om notasjon foran oppgaven: $E'(r, \theta, \varphi)$ er ikke "den samme deriverte med nye bokstaver". Den kartesiske $E'(x)$ og den kulekoordinatiske $E'(r, \theta, \varphi)$ er jacobimatrissene til to *forskjellige* funksjoner, f og $h = f \circ g$, og de henger sammen med en g' imellom. Legg spesielt merke til at $\frac{\partial E}{\partial \theta}$ ikke er null selv om feltstyrken er den samme hele veien rundt: det er retningen e_r som endrer seg når du går østover, ikke størrelsen.

- 16 Se på en liten kvadratisk bit av skinnet med hjørne i x og sidekant h . Strekket T er kraft per meter, så langs sidekanten der x_1 er lik $x_1 + h$ drar resten av skinnet med kraften Th , rettet utover langs skinnet. Akkurat som for strengen dekomponerer vi denne kraften, og trekanten den danner er kongruent med trekanten som gir stigningen til u i x_1 -retningen, så den vertikale komponenten er $Th \partial_{x_1} u(x_1 + h, x_2)$. Den motstående sidekanten gir $-Th \partial_{x_1} u(x_1, x_2)$, og de to andre sidekantene gir det samme med x_2 i rollen som x_1 . Massen til biten er ρh^2 , så Newtons andre lov blir

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Th \left(\partial_{x_1} u(x_1 + h, x_2) - \partial_{x_1} u(x_1, x_2) \right) + Th \left(\partial_{x_2} u(x_1, x_2 + h) - \partial_{x_2} u(x_1, x_2) \right).$$

Deler vi på h^2 og lar $h \rightarrow 0$, står vi med

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right).$$

Hver av de to retningene bidrar med sin egen strengbølgelikning, og summen er laplaceoperatoren - det er derfor Δ dukker opp overalt der noe er spent opp i mer enn én retning. Kjenner du Greens teorem, går det for en vilkårlig bit Ω : den vertikale kraften langs randa er $T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds = T \iint_{\Omega} \Delta u$, og siden det gjelder for alle Ω , må integrandene være like.

- 17 Skinnet står i ro, så $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, og ingenting trykker på det. Da sier bølgelikningen fra forrige oppgave at

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

over hele skinnet - Laplaces likning. Skinnets form er altså en harmonisk funksjon, og ramma bestemmer verdiene langs randa, så formen er løsningen av et dirichletproblem. Etter middelverdiegenskapen i oppgave 19 kan skinnet verken bule opp eller ned inni ramma, og den skjeve ramma tvinger det til å legge seg i en sal: se den ikke eksamensrelevante oppgaven bakerst. Hadde det ligget en stein på skinnet med trykk p , ville vi fått Poissons likning $T\Delta u = p$ istedet.

- 18 La Q være en ortogonal 3×3 -matrise og sett $v(y) = u(Qy)$, altså u sett i et rotert koordinat-system. Kjerneregelen gir

$$\nabla v(y) = Q^T \nabla u(Qy),$$

og bruker vi den en gang til på hver komponent, blir hessematrisen

$$v''(y) = Q^T u''(Qy) Q.$$

Laplaceoperatoren er sporet til hessematrisen, jf. oppgave 8, og sporet bryr seg ikke om syklisk ombytting:

$$\Delta v(y) = \text{tr}(Q^T u''(Qy) Q) = \text{tr}(u''(Qy) Q Q^T) = \text{tr}(u'') = \Delta u(Qy).$$

Her brukte vi $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ og $Q Q^T = I$.

Dette er egentlig hele grunnen til at laplaceoperatoren og divergensen dukker opp overalt i fysikken. Naturen bryr seg ikke om hvordan vi har lagt aksene våre, så en fysisk lov må være bygget av størrelser som overlever en rotasjon. Sporet til en matrise er nettopp en slik størrelse, og både $\nabla \cdot f$ og Δu er spor. De enkelte annenderiverte $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ er derimot ikke rotasjonsinvariante hver for seg - bare summen er det.

- 19 La $\omega(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ og se på gjennomsnittet over sirkelen med radius ρ :

$$M(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho\omega(\alpha)) d\alpha.$$

Vi deriverer under integraltegnet:

$$M'(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x + \rho\omega) \cdot \omega d\alpha.$$

Men ω er nettopp utnormalen e_n på denne sirkelen, og buelengden er $ds = \rho d\alpha$, så dette er

$$M'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds = \frac{1}{2\pi\rho} \iint_{|y-x|\leq\rho} \Delta u = 0$$

etter den andre versjonen av Greens teorem: fluksen av ∇u ut av en skive er integralet av Δu over den. Altså er M konstant. Lar vi $\rho \rightarrow 0$, går $M(\rho) \rightarrow u(x)$, og dermed er $M(r) = u(x)$, som er den første likheten.

Den andre får vi ved å integrere den første i polarkoordinater:

$$\iint_{\Omega} u = \int_0^r \left(\int_{|y-x|=\rho} u ds \right) d\rho = \int_0^r 2\pi\rho u(x) d\rho = \pi r^2 u(x).$$

Dette kalles **middelverdiegenskapen**,⁷ og den er sterkere enn den ser ut. En harmonisk funksjon er lik gjennomsnittet av seg selv rundt ethvert punkt, og da kan den ikke ha en topp inni området: hadde den hatt et maksimum i x , måtte alt rundt vært mindre, og da kunne ikke gjennomsnittet blitt $u(x)$. Maksimum og minimum må altså ligge på randa. Dette er **maksimumsprinsippet**, og det er derfor et trommeskinn i ro aldri bulker opp av seg selv: hele formen bestemmes av kanten.

- 20 Den blir

$$y_1 = x_1 - v_1 t$$

$$y_2 = x_2 - v_2 t$$

$$y_3 = x_3 - v_3 t$$

eller $y = x - vt$, og for ordens skyld $\tau = t$. På Galileo Galileis tid var det selvfølgelig ingen som tenkte tanken at du kanskje kjøddda til tiden når du bytta koordinatsystem på denne måten.

- 21 $c \approx 3 \cdot 10^8$ meter per sekund i begge. Den galileiske transformasjonen ville gitt $c - v$ i det ene systemet, men det er ikke det man måler.

- 22 Veien fotonet reiser sett fra togvoggen er $2L$, der L er takhøyden, så tiden målt i vognen er

$$t_0 = \frac{2L}{c}.$$

Sett fra togskinna har toget flyttet seg $vt/2$ mens fotonet går opp, så fotonet går langs to skrå linjestykker, og

$$ct = 2\sqrt{L^2 + v^2 t^2/4},$$

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function

slik at

$$t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Forholdet mellom disse to tidene er

$$\frac{t}{t_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

23 Transformasjonen den ene veien er

$$y_1 = \gamma(x_1 - v_1 t),$$

og sett fra y -systemet beveger x -systemet seg med farten $-v_1$, så den andre veien er

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(y_1 + v_1 \tau) \\ &= \gamma(\gamma(x_1 - v_1 t) + v_1 \tau) \\ &= \gamma^2 x_1 - \gamma^2 v_1 t + \gamma v_1 \tau. \end{aligned}$$

Vi løser for τ :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{x_1(1 - \gamma^2)}{\gamma v_1} + \gamma t \\ &= \gamma \left(t - \frac{v_1 x_1}{c^2} \right), \end{aligned}$$

der vi har brukt at $1 - \gamma^2 = -\gamma^2 v_1^2/c^2$.

24 Med $x_0 = ct$ er $\frac{1}{c^2} \ddot{u} = \partial_{x_0}^2 u$, så operatoren er $\partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2$. Setter vi $u(x_0, x_1) = w(y_0, y_1)$ med $y_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1)$ og $y_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0)$, gir kjerneregelen

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} &= \gamma \partial_{y_0} - \gamma \beta \partial_{y_1}, \\ \partial_{x_1} &= -\gamma \beta \partial_{y_0} + \gamma \partial_{y_1}. \end{aligned}$$

Da blir

$$\begin{aligned} \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 &= \gamma^2 (\partial_{y_0} - \beta \partial_{y_1})^2 - \gamma^2 (\partial_{y_1} - \beta \partial_{y_0})^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (\partial_{y_0}^2 - \partial_{y_1}^2) = \partial_{y_0}^2 - \partial_{y_1}^2, \end{aligned}$$

siden de blandede leddene $-2\beta \partial_{y_0} \partial_{y_1}$ kansellerer og $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$. Operatoren ser altså lik ut i begge inertialsystemene. Dette er også et spesialtilfelle av oppgave 30.

25 En rotasjon R av romkoordinatene lar x_0 være i fred og endrer ikke $|x|$, siden $R^T R = I$ gir $|Rx|^2 = x^T R^T R x = |x|^2$. Da endrer den ikke $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 - |x|^2$ heller.

26 Del romdelen av x i en del langs fartsretningen n og en del normalt på den: $x = (n^T x)n + x_\perp$. Lengdekontraksjonen virker bare langs n , så

$$\begin{aligned} y_0 &= \gamma(x_0 - \beta n^T x), \\ y &= \gamma(n^T x - \beta x_0)n + x_\perp = x + (\gamma - 1)(n^T x)n - \gamma \beta x_0 n. \end{aligned}$$

På matrisform er romdelen $I + (\gamma - 1)nn^T$, og siden $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma - 1)(\gamma + 1)$, er

$$(\gamma - 1)n_i n_j = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta_i \beta_j = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \beta_i \beta_j,$$

som er uttrykket i Λ . Med K som i oppgaven er

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & nn^T \end{pmatrix},$$

så

$$I + \gamma\beta K + (\gamma - 1)K^2 = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta n^T \\ -\gamma\beta n & I + (\gamma - 1)nn^T \end{pmatrix} = \Lambda.$$

27 Vi har K^2 fra forrige oppgave, og

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & -n^T \\ -nn^T n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n^T \\ -n & 0 \end{pmatrix} = K,$$

siden $n^T n = 1$, slik at $K^4 = K^2$ og $K^5 = K^3 = K$ og så videre. Dette gjør det enkelt å summere opp eksponensialfunksjonen:

$$\begin{aligned} e^{\lambda K} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k K^k}{k!} \\ &= I + K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} + K^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= I + K \sinh(\lambda) + K^2 (\cosh(\lambda) - 1). \end{aligned}$$

Med $\sinh \lambda = \gamma\beta$ og $\cosh \lambda = \gamma$ er dette Λ fra forrige oppgave.

28 Siden $\lambda_1 K$ og $\lambda_2 K$ åpenbart kommuterer, kan vi regne ut at

$$\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)K} = e^{\lambda_1 K} e^{\lambda_2 K} = \Lambda(\lambda_1) \Lambda(\lambda_2).$$

To boost i samme retning etter hverandre er altså en boost med rapiditeten $\lambda_1 + \lambda_2$. Farten blir $\tanh(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$, som er Einsteins hastighetsaddisjonslov.

29 Minkowskiproduktet til hendelsen x er $x^T \eta x$, og vi må ha at

$$x^T \eta x = (\Lambda x)^T \eta \Lambda x = x^T \Lambda^T \eta \Lambda x$$

for alle hendelser x . Siden η og $\Lambda^T \eta \Lambda$ er symmetriske, er dette sant for alle x bare dersom $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$. For boostene kan vi sjekke det direkte. Regner vi ut, får vi $\eta K = -K \eta$, så $e^{\lambda K} \eta = \eta e^{-\lambda K}$, og siden Λ er symmetrisk, er

$$\Lambda^T \eta \Lambda = e^{\lambda K} \eta e^{\lambda K} = \eta e^{-\lambda K} e^{\lambda K} = \eta.$$

30 Husk at $x_0 = ct$, så $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 = \partial_{x_0}^2$. Vi setter

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_0} \\ \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix},$$

slik at

$$\square_x = \nabla_x^T \eta \nabla_x.$$

Setter vi $y = \Lambda x$, gir kjerneregelen $\partial_{x_j} = \sum_i \Lambda_{ij} \partial_{y_i}$, altså

$$\nabla_x = \Lambda^T \nabla_y.$$

Forrige oppgave og symmetrien til Λ gir nå at

$$\square_x = \nabla_x^T \eta \nabla_x = \nabla_y^T \Lambda \eta \Lambda^T \nabla_y = \nabla_y^T \Lambda^T \eta \Lambda \nabla_y = \nabla_y^T \eta \nabla_y = \square_y,$$

akkurat som laplaceoperatoren er invariant under rotasjoner.

UKENS NØTTER

- 1 Ja, ladning i bevegelse lager magnetfelt. Sett fra elektronet på perrongen beveger elektronet i toget seg, og da er det et magnetfelt i tillegg til det elektriske feltet. Sett fra toget er det perrong-elektronet som beveger seg. Elektronene kan altså krangle om hvem av dem som lager magnetfeltet, men de blir enige om kreftene på hverandre: de elektriske og magnetiske feltene blander seg når vi bytter inertialsystem (de transformeres med en lorentztransformasjon), og totalkraften kommer ut likt. Tolkningen er forskjellig, men prediksjonene er identiske.
- 2 Legg lysklokka ned, slik at fotonet går fram og tilbake langs toget over en strekning som har lengden L_0 målt i toget. I toget tar turen $t_0 = 2L_0/c$. Fra perrongen har strekningen lengden L . På veien fram løper fotonet etter enden som flytter seg, og på veien tilbake kommer enden imot, så

$$t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c}\gamma^2.$$

Fra oppgave 22 vet vi at klokka i toget går saktere, så $t = \gamma t_0 = 2\gamma L_0/c$. Setter vi disse like, får vi

$$L = \frac{L_0}{\gamma},$$

så lengden i fartsretningen krymper med faktoren γ .

- 3 Tiden er bare en parameter for nablaoperatoren, så

$$\dot{f} = x_3 \quad \text{og} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ t \end{pmatrix}.$$

- 4 Statisk betyr $\dot{B} = 0$, så Faradays lov sier $\nabla \times E = 0$. Gradienter er rotasjonsfrie (oppgave 9), og det omvendte gjelder på snille områder: et rotasjonsfritt felt er en gradient. Det finnes altså et skalarfelt ϕ med

$$E = -\nabla\phi,$$

og E er konservativt - arbeidet feltet gjør på en ladning avhenger bare av start og slutt. Minustegnet er konvensjon, slik at feltet peker fra høyt til lavt potensial. Setter vi dette inn i Gauss' lov, blir

$$\nabla \cdot E = -\nabla \cdot \nabla\phi = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{altså} \quad \Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Dette er Poissons likning, og i tomt rom er den Laplaces likning: det elektrostatiske potensialet er harmonisk der det ikke er ladning, akkurat som coloumbpotensialet i økt 10.

- 5 La Ω være kula med radius r sentrert i ladningen. Gauss' lov på integralform sier at fluksen ut av Ω er den innesluttete ladningen delt på ϵ_0 :

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot e_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Sfærisk symmetri betyr at feltet peker radielt og bare avhenger av avstanden, $E = E(r) e_r$, og på kuleskallet er $e_n = e_r$, så integranden er konstant lik $E(r)$ og

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{altså} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}.$$

Det er coloumbfeltet fra oppgave 7. Faktoren $1/r^2$ er ren geometri: den samme fluksen skal fordeles over et kuleskall som vokser som r^2 . Fluksregningen i økt 11 er det samme argumentet baklengs.

- 6 Samme regning med B : Gauss' lov for magnetisme sier at fluksen av B ut av *enhver* lukket flate er null. Fantes det en magnetisk punktladning g i origo, ville symmetrien tvunget fram $B = B(r) e_r$, og fluksen ut av en kule rundt den ville vært $4\pi r^2 B(r)$. Den kan bare være null om $B(r) = 0$, så det finnes ikke noe radielt magnetfelt fra en monopol - $\nabla \cdot B = 0$ har ingen plass til kilder. Feltlinjene til B må lukke seg om seg selv, mens feltlinjene til E starter og slutter på ladninger.

- 7 Statisk og med strøm: $c^2 \nabla \times B = J/\epsilon_0$. På integralform sier Ampères lov at sirkulasjonen av B rundt randa til en flate Σ er strømmen gjennom flaten delt på $\epsilon_0 c^2$:

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot e_n dS = \frac{I}{\epsilon_0}.$$

La Σ være en sirkelskive med radius s vinkelrett på ledningen og sentrert på den. Radiell symmetri betyr at B peker langs sirkelene rundt ledningen og bare avhenger av s , $B = B(s) e_\theta$, så $B \cdot ds = B(s) ds$ og

$$c^2 \cdot 2\pi s B(s) = \frac{I}{\epsilon_0}, \quad \text{altså} \quad B(s) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

med $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$. Retningen følger høyrehåndsregelen: tommelen langs strømmen, fingrene langs B . Der punktladningen ga $1/r^2$ fordi fluksen fordeles på et kuleskall, gir ledningen $1/s$ fordi sirkulasjonen fordeles på en sirkel.

- 8] Siden $\nabla \cdot B = 0$, finnes det et vektorpotensial A med $B = \nabla \times A$ (jf. oppgave 11). Det er ikke entydig: $A + \nabla \chi$ gir samme B for ethvert skalarfelt χ , siden $\nabla \times \nabla \chi = 0$. Den friheten bruker vi til å gjøre A divergensfritt - velg χ som løser Poissons likning $\Delta \chi = -\nabla \cdot A$, så er $\nabla \cdot (A + \nabla \chi) = 0$. Med $\nabla \cdot A = 0$ gir identiteten fra oppgave 12

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \Delta A = -\Delta A,$$

og Ampères lov $c^2 \nabla \times B = J/\epsilon_0$ blir

$$\Delta A = -\frac{J}{\epsilon_0 c^2} = -\mu_0 J.$$

Hver komponent av A tilfredsstiller altså Poissons likning med den tilsvarende strømkomponenten som kilde, akkurat som det elektriske potensialet med ladningen som kilde, og i tomt rom er komponentene harmoniske.

- 9] I tomt rom er $\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0$. Ta rotasjonen av Faradays lov og bytt rekkefølge på tids- og romderivasjon:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla \times \dot{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B) = -\frac{1}{c^2} \ddot{E},$$

der vi satte inn Ampères lov til slutt. Venstresiden er $\nabla (\nabla \cdot E) - \Delta E = -\Delta E$ etter oppgave 12, så

$$\ddot{E} = c^2 \Delta E.$$

For B tar vi rotasjonen av Ampères lov og setter inn Faradays:

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times B) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) = -\ddot{B}, \quad c^2 \nabla \times (\nabla \times B) = -c^2 \Delta B,$$

altså $\ddot{B} = c^2 \Delta B$. Hver komponent av begge feltene tilfredsstiller bølgelikningen med farten c - og c var i utgangspunktet bare konstanten i Ampères lov, målt med spoler og kondensatorer. At den stemte med lyshastigheten var Maxwells store øyeblikk.

- 10] Siden $\nabla e^{i(k \cdot x - \omega t)} = ik e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ og $\partial_t e^{i(k \cdot x - \omega t)} = -i\omega e^{i(k \cdot x - \omega t)}$, virker nablaoperatoren som ik og tidsderivasjonen som $-i\omega$ på slike bølger. De to divergenslikningene gir da

$$ik \cdot E_0 = 0 \quad \text{og} \quad ik \cdot B_0 = 0,$$

så både E_0 og B_0 står vinkelrett på bølgeretningen k . Faradays lov gir

$$ik \times E_0 = i\omega B_0, \quad \text{altså} \quad B_0 = \frac{1}{\omega} k \times E_0,$$

og et kryssprodukt står vinkelrett på begge faktorene, så $B_0 \perp E_0$. Dermed er E_0 , B_0 og k innbyrdes ortogonale. Ampères lov gir tilsvarende $c^2 k \times B_0 = -\omega E_0$, og setter du inn uttrykket for B_0 og bruker BAC-CAB, står det $c^2 |k|^2 = \omega^2$: bølgen reiser med farten $\omega/|k| = c$, og $|B_0| = |E_0|/c$. Kryssproduktet $E \times B$ peker langs k og kalles **poyntingvektoren**⁸ - den sier hvor energien i bølgen er på vei.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_vector

- 11 De to divergenslikningene, Gauss' lov og Gauss' lov for magnetisme. Ta divergensen av Faradays lov:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot B,$$

så $\nabla \cdot B$ er konstant i tid - er den null i starten, forblir den null. Ta divergensen av Ampères lov:

$$0 = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times B) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J,$$

og siden ladning er bevart, $\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$ (kontinuitetslikningen, jf. gammel eksamensoppgave 12), står det

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0.$$

Gjelder Gauss' lov i ett øyeblikk, gjelder den altså for alltid. De to rotasjonslikningene styrer hvordan feltene utvikler seg i tid, og divergenslikningene er bare krav til starttilstanden - de blir med på lasset gratis. Det er derfor Maxwells likninger, som ser ut som åtte likninger for seks ukjente, ikke er overbestemt likevel.

- 12 Lett! Arbeidet den magnetiske kraften gjør på partikkelen langs banen Γ fra $x(a)$ til $x(b)$ er

$$\int_{\Gamma} q(v \times B) \cdot ds = q \int_a^b (v \times B) \cdot v dt = 0,$$

siden et kryssprodukt står vinkelrett på begge faktorene sine. Sagt med effekt: kraften leverer $F \cdot v$ per tidsenhet, og

$$F \cdot v = q(E + v \times B) \cdot v = qE \cdot v + q(v \times B) \cdot v = qE \cdot v.$$

Den magnetiske kraften står alltid normalt på farten, så den kan bøye banen, men aldri endre farten eller den kinetiske energien - det er derfor ladde partikler går i sirkler i et magnetfelt, og derfor alt arbeidet i en elektromotor til syvende og sist gjøres av det elektriske feltet.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Dette er feltet fra oppgave 4. Jacobimatrisen er permutasjonsmatrisen

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

så divergensen (sporet) er 0, og rotasjonen er

$$\nabla \times f = (\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2, \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3, \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1)^T = (1, 1, 1)^T.$$

Et vektorpotensial er en g med $\nabla \times g = f$, altså

$$\partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2 = x_3, \quad \partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3 = x_1, \quad \partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 = x_2.$$

Prøver vi $g = -\frac{1}{2}(x_2^2, x_3^2, x_1^2)^T$, blir hver komponent i g bare derivert med hensyn på "sin" variabel én gang, og de tre likningene går opp; dessuten er $\nabla \cdot g = 0$ siden g_k ikke avhenger av x_k . At det finnes et vektorpotensial er ingen tilfeldighet - det gjør det for alle divergensfrie felt, jf. oppgave 11. Konservativt er f ikke: et konservativt felt er en gradient, og gradienter er rotasjonsfrie (oppgave 9), men $\nabla \times f = (1, 1, 1)^T \neq 0$. Feltet dreier rundt diagonalen $(1, 1, 1)^T$, og gjør arbeid på alt som går rundt den.

- 2 Dette er oppgave 3, den inverse permutasjonen av feltet over, så $\nabla \cdot f = 0$ og

$$\nabla \times f = (\partial_{x_2} x_1 - \partial_{x_3} x_3, \partial_{x_3} x_2 - \partial_{x_1} x_1, \partial_{x_1} x_3 - \partial_{x_2} x_2)^T = -(1, 1, 1)^T,$$

motsatt av forrige oppgave. Vektorpotensialet får motsatt fortegn og de kvadrerte variablene byttes rundt: $g = \frac{1}{2}(x_3^2, x_1^2, x_2^2)^T$ gir

$$\nabla \times g = \left(\partial_{x_2} \frac{x_2^2}{2} - 0, \partial_{x_3} \frac{x_3^2}{2} - 0, \partial_{x_1} \frac{x_1^2}{2} - 0 \right)^T = (x_2, x_3, x_1)^T = f,$$

og $\nabla \cdot g = 0$. Du kan legge til gradienten av et hvilket som helst harmonisk skalarfelt og fortsatt ha et divergensfritt vektorpotensial - det er samme frihet som når man velger konstanten i et vanlig potensial.

- 3 La $f = \nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u)^T$. Sirkulasjonen rundt en lukket kurve $\partial\Omega$ er arbeidet, og Greens teorem gir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot ds = \iint_{\Omega} \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 = \iint_{\Omega} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u - \partial_{x_2} \partial_{x_1} u = 0,$$

siden de blandede andrederiverte er like. Det er den todimensjonale utgaven av $\nabla \times \nabla u = 0$ fra oppgave 9. Enda enklere: langs kurven $x(t)$ er $f \cdot \dot{x} = \nabla u \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt} u(x(t))$ etter kjerneregelen, så arbeidet fra a til b er $u(b) - u(a)$ uansett vei, og null rundt en lukket kurve. Gradientfelt er konservative - det er derfor u kalles et potensial.

- 4 Vi vil ha L med $\nabla L = f$, altså $\partial_p L = p$ og $\partial_q L = -\sin q$. Den første gir $L = \frac{1}{2}p^2 + h(q)$, og den andre gir da $h'(q) = -\sin q$, så

$$L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \cos q,$$

pluss en vilkårlig konstant. Sjekk først at det er mulig: $\partial_p(-\sin q) - \partial_q(p) = 0$, så feltet er rotasjonsfritt, som det må være for å ha et potensial.

- 5 Vi regner ut rotasjonen i planet:

$$\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 = a_1 v_2 - a_2 v_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & v_1 \\ a_2 & v_2 \end{pmatrix},$$

en konstant som er null nøyaktig når a og v er parallelle. Er den null, er $v = ca$ for en konstant c , og da er

$$f = c(a^T x) a = \nabla \left(\frac{c}{2} (a^T x)^2 \right),$$

så f er konservativt. Er den ikke null, gir Greens teorem at arbeidet rundt en lukket kurve som omslutter arealet A er $(a_1 v_2 - a_2 v_1)A \neq 0$, så f gjør arbeid på noe som kommer tilbake til start, og kan ikke være konservativt. Geometrisk: f peker alltid langs v og varierer bare langs a ; er de to retningene forskjellige, er feltet en skjærstrøm som får ting til å rotere.

- 6 Greens teorem er raskest: $\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 = -1 - 1 = -2$, og ellipsen $x_1^2/(1/2) + x_2^2 = 1$ har halvaksler $1/\sqrt{2}$ og 1 , altså areal $\pi/\sqrt{2}$, så

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = -2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \pi.$$

Direkte: med $x(t) = (\cos t/\sqrt{2}, \sin t)^T$ er

$$f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \left(\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

konstant, så integralet er $-2\pi/\sqrt{2} = -\sqrt{2} \pi$. Negativt fordi $f = (x_2, -x_1)^T$ roterer med klokken mens partikkelen går mot.

- 7 Feltet $g = (-x_2, x_1)^T$ er rotasjon mot klokken med $\partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 = 2$ og $\nabla \cdot g = 0$. Greens teorem i de to versjonene gir da arbeidet $2 \cdot \pi = 2\pi$ og fluksen $0 \cdot \pi = 0$. Direkte ser du det samme: på enhetssirkelen $x(t) = (\cos t, \sin t)^T$ er $g = \dot{x}$, så $g \cdot \dot{x} = 1$ og arbeidet er 2π , mens $g \cdot e_n = g \cdot x = -x_2 x_1 + x_1 x_2 = 0$ overalt - feltet går rundt og rundt, aldri inn eller ut.

- 8 f er lineær, så alle andrederiverte er null, og $\Delta f = 0 + 0 = 0$. Det er dette som gjør at volumet under grafen over en sirkelskive er høyden i sentrum ganger arealet (økt 9), og at fluksen til ∇f ut av ethvert område er null (gammel eksamensoppgave 9).

- 9 Gradienten $\nabla f = (2, 1)^T$ er konstant, så $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = 0$, og den andre versjonen av Greens teorem gir

$$\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot e_n ds = \iint_{\Omega} \Delta f = 0.$$

Et konstant felt renner like mye inn på den ene siden av sirkelen som ut på den andre.

- 10 Fra økt 8 er f'' konstant med $\Delta f = -2 - 8 = -10$, og kvadratet har diagonaler av lengde 2, altså areal 2, så

$$\int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot e_n ds = \iint_{\Omega} \Delta f = -10 \cdot 2 = -20.$$

Negativt: f er en fjellrygg, gradienten peker overalt inn mot kammen, så gradientfeltet renner inn i Ω fra alle kanter.

- 11 Dette er utledningen av varmelikningen fra økt 3 i tre dimensjoner. Det eneste nye er at den andre versjonen av Greens teorem må byttes ut med sin tredimensjonale utgave, **divergens-teoremet**:⁹

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot f \, dx = \iint_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, dS$$

for et område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ med utnormal e_n - det som renner ut gjennom randa er summen av kildene inni.

La $u(x, t)$ være temperaturen, c den spesifikke varmekapasiteten og ρ massetettheten, slik at varmeinnholdet i Ω er $\iiint_{\Omega} c\rho u \, dx$. Fouriers varmelov sier at varmekraften er $q = -\kappa \nabla u$, så det renner $\iint_{\partial\Omega} q \cdot e_n \, dS$ ut gjennom randa per sekund, og produseres det ikke varme inni Ω , er

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} c\rho u \, dx &= - \iint_{\partial\Omega} q \cdot e_n \, dS = \kappa \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot e_n \, dS \\ &= \kappa \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u \, dx = \kappa \iiint_{\Omega} \Delta u \, dx. \end{aligned}$$

Flytter vi tidsderivasjonen inn under integraltegnet, står det $\iiint_{\Omega} (c\rho \dot{u} - \kappa \Delta u) \, dx = 0$ for ethvert område Ω , og da må integranden være null overalt:

$$\dot{u} = \alpha \Delta u = \alpha (\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u), \quad \alpha = \frac{\kappa}{c\rho}.$$

- 12 Dette er oppgave 2 og 3 i økt 3 i tre dimensjoner. Massen inni et område Ω er $\iiint_{\Omega} \rho \, dx$, og ρv er massefluksen - kilo per sekund per kvadratmeter - så det renner $\iint_{\partial\Omega} \rho v \cdot e_n \, dS$ kilo ut per sekund. Skapes eller forsvinner det ikke masse, må

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, dx + \iint_{\partial\Omega} \rho v \cdot e_n \, dS = 0,$$

og divergensteoremet (forrige oppgave) gjør flateintegralet om til $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho v) \, dx$. Da er $\iiint_{\Omega} \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) \, dx = 0$ for alle Ω , så

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Ficks lov sier at massefluksen er proporsjonal med minus gradienten til tettheten, $\rho v = -D \nabla \rho$, og setter vi det inn, får vi

$$\dot{\rho} = -\nabla \cdot (-D \nabla \rho) = D \Delta \rho.$$

Med Fouriers lov istedenfor Ficks er dette varmelikningen fra forrige oppgave - samme likning, annen fysikk.

- 13 Sett $f = \nabla u$ inn i divergensteoremet. Venstresiden blir $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u \, dx = \iiint_{\Omega} \Delta u \, dx$ og høyresiden $\iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot e_n \, dS$, så

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \, dx = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot e_n \, dS = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} \, dS.$$

Er u harmonisk, er venstresiden null, og dermed er fluksen til ∇u ut av Ω null - for ethvert område. I planet er dette gammel eksamensoppgave 9, og fysikken er den samme: tenker du på u som temperatur, sier det at en stasjonær temperaturfordeling har like mye varme inn som ut av alt.

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem

- 14 Skriv $u(x) = \Phi(r)$ med $r = |x|$. Kjernerregelen gir $\nabla u = \Phi'(r) x/r$, og divergensen av $h(r) x$ er $\nabla h \cdot x + h \nabla \cdot x = h'(r) r + 3h(r)$ (økt 10 og oppgave 2), så med $h = \Phi'/r$ blir

$$\Delta u = r \left(\frac{\Phi'}{r} \right)' + \frac{3\Phi'}{r} = \Phi'' - \frac{\Phi'}{r} + \frac{3\Phi'}{r} = \Phi'' + \frac{2\Phi'}{r} = \frac{1}{r^2} (r^2 \Phi')'.$$

Laplaces likning blir $(r^2 \Phi')' = 0$, så $r^2 \Phi' = c_1$ og

$$\Phi(r) = c_2 - \frac{c_1}{r}.$$

Utenom konstantene er $1/r$ altså den eneste radielt symmetriske harmoniske funksjonen i rommet - coulombpotensialet fra oppgave 7 og økt 10. I planet er det $\ln r$ som spiller denne rollen (økt 10, oppgave 9), og faktoren $2/r$ foran Φ' er dimensjonen minus én.

- 15 Dette er oppgave 19 i tre dimensjoner, og beviset er det samme. La ω løpe over enhetskuleskallet og se på gjennomsnittet over skallet med radius ρ :

$$M(\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{|y-x|=\rho} u \, dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{|\omega|=1} u(x + \rho\omega) \, dS_\omega.$$

Deriverer vi under integraltegnet, er

$$\begin{aligned} M'(\rho) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{|\omega|=1} \nabla u(x + \rho\omega) \cdot \omega \, dS_\omega = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{|y-x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial e_n} \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi\rho^2} \iiint_{|y-x|\leq\rho} \Delta u \, dy = 0, \end{aligned}$$

siden ω er utnormalen på skallet, $dS = \rho^2 dS_\omega$, og forrige oppgave gjør fluksen om til et volumintegral av $\Delta u = 0$. Så M er konstant, og siden $M(\rho) \rightarrow u(x)$ når $\rho \rightarrow 0$, er $M(r) = u(x)$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS.$$

Den andre formelen får vi ved å skrelle kula i skall:

$$\iiint_{\Omega} u \, dy = \int_0^r \left(\iint_{|y-x|=\rho} u \, dS \right) d\rho = \int_0^r 4\pi\rho^2 u(x) \, d\rho = \frac{4\pi r^3}{3} u(x).$$

En harmonisk funksjon er gjennomsnittet av seg selv rundt ethvert punkt, og kan derfor ikke ha topper eller bunner inni området - maksimumsprinsippet.

- 16 Produktregelen for divergens er $\nabla \cdot (uF) = \nabla u \cdot F + u \nabla \cdot F$, og med $F = \nabla v$ blir det

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

Integrerer vi over Ω og bruker divergensteoremet på venstresiden, står formelen der:

$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v \, dx = \iint_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot e_n \, dS.$$

Dette er delvis integrasjon i tre dimensjoner, og kalles Greens første identitet.

Anta at u_1 og u_2 begge løser dirichletproblemet, og sett $w = u_1 - u_2$. Laplaceoperatoren er lineær, så $\Delta w = f - f = 0$ i Ω , og $w = g - g = 0$ på $\partial\Omega$. Bruk identiteten med $u = v = w$:

$$\iiint_{\Omega} |\nabla w|^2 + w \Delta w \, dx = \iint_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot e_n \, dS.$$

Høyresiden er null fordi $w = 0$ på randa, og $w \Delta w = 0$ inni, så $\iiint_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx = 0$. Integranden er ikke-negativ, så $\nabla w = 0$ overalt, altså er w konstant, og siden den er null på randa, er $w = 0$: $u_1 = u_2$. Det spiller altså ingen rolle hvordan du finner løsningen - har du én, har du den eneste.

- 17 Bruk divergensteoremet på vektorfeltet $f = u e_k$, som bare har komponent k : $\nabla \cdot f = \partial_{x_k} u$ og $f \cdot e_n = u e_{nk}$, så

$$\iiint_{\Omega} \partial_{x_k} u \, dx = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot f \, dx = \iint_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, dS = \iint_{\partial\Omega} u e_{nk} \, dS.$$

Det er analysens fundamentalteorem i tre dimensjoner: integralet av en derivert er bestemt av verdiene på randa. Med $u = 1$ sier det at $\iint_{\partial\Omega} e_n \, dS = 0$ - normalvektorene til en lukket flate summerer til null, som er grunnen til at trykket i en væske i ro ikke skyver på noe.

- 18 Fra økt 12 ligger Ω over enhetssirkelskiven D , mellom bunnen $x_3 = x_1^2 + 3x_2^2$ og toppen Σ . Divergensen til $f = (2, 0, x_2)^T$ er $0 + 0 + 0 = 0$, så divergensteoremet gir at fluksen ut av Ω er null. Vil du regne det ut, er oppovernormalen til toppen $g(x) = (x_1, x_2, 4 - 3x_1^2 - x_2^2)^T$

$$\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g = (1, 0, -6x_1)^T \times (0, 1, -2x_2)^T = (6x_1, 2x_2, 1)^T,$$

som peker ut, og $f \cdot (6x_1, 2x_2, 1)^T = 12x_1 + x_2$ integrerer til null over D av symmetri. På bunnen er utnormalen nedover, $(2x_1, 6x_2, -1)^T$, og $f \cdot (2x_1, 6x_2, -1)^T = 4x_1 - x_2$ integrerer også til null. Totalt null, som det skulle.

Rotasjonen er

$$\nabla \times f = (\partial_{x_2} x_2 - 0, 0 - \partial_{x_1} x_2, 0 - 0)^T = (1, 0, 0)^T,$$

et konstant felt langs x_1 -aksen, og fluksen ut gjennom toppen er

$$\iint_D (1, 0, 0) \cdot (6x_1, 2x_2, 1)^T \, dx = \iint_D 6x_1 \, dx = 0.$$

Det er også det Stokes' teorem sier:¹⁰ fluksen til $\nabla \times f$ gjennom Σ er arbeidet f gjør rundt randkurven $\partial\Sigma$, og med $x(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos 2t)^T$ er $f \cdot \dot{x} = -2 \sin t + 2 \sin t \sin 2t$, som integrerer til null over en runde.

- 19 Randen til Σ ligger over enhetssirkelen, $x(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \cos 2t)^T$ for $t \in [0, 2\pi]$, med $\dot{x} = (-\sin t, \cos t, -2 \sin 2t)^T$, og der er $g = (-\sin t, \cos t, 3 + 2 \cos 2t)^T$, så

$$\int_{\partial\Sigma} g \cdot ds = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin 2t (3 + 2 \cos 2t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 - 6 \sin 2t - 2 \sin 4t \, dt = 2\pi.$$

Den vertikale komponenten går opp og ned og bidrar ikke over en hel runde, og de to første komponentene er rotasjonsfeltet fra gammel eksamensoppgave 7. (Stokes' teorem gir det samme

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes%27_theorem

raskere: $\nabla \times g = (0, 0, 2)^T$, og fluksen av det gjennom Σ er $\iint_D 2 \, dx = 2\pi$, jf. normalvektoren i økt 11.)

Divergensen er $\nabla \cdot g = 0 + 0 + 2 = 2$, og volumet av Ω er π (økt 9, gammel eksamensoppgave 4), så divergensteoremet gir fluksen 2π ut av Ω . Direkte: gjennom Σ er fluksen 3π (økt 11, gammel eksamensoppgave 7), og gjennom bunnen D , der utnormalen er $-e_3$ og $x_3 = 0$, er $g \cdot (-e_3) = -1$, altså $-\pi$. Summen er $3\pi - \pi = 2\pi$.

IKKE EKSAMENSRELEVANT

- 1 Skinnet er i ro og ingenting trykker på det, så etter oppgave 17 er $\Delta u = 0$: formen er en harmonisk funksjon, og etter maksimumsprinsippet i oppgave 19 er den entydig bestemt av randa.

Antar vi at skinnet sett ovenfra fortsatt er sirkelen med radius a , og at kanten er bøyd slik at høyden langs den er $x_1 x_2$, er vi ute etter den harmoniske funksjonen på disken med de randverdiene. Men den finner vi ved å se ordentlig etter:

$$\Delta(x_1 x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1 x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1 x_2) = 0 + 0 = 0,$$

så $x_1 x_2$ er selv harmonisk, og dermed er

$$u(x) = x_1 x_2$$

svaret - ikke bare på randa, men over hele skinnet. Entydigheten er verdt et øyeblikk: hadde det vært to løsninger, ville differansen vært harmonisk og null på randa, og etter maksimumsprinsippet null overalt.

I polarkoordinater blir dette

$$u = r^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{r^2}{2} \sin 2\theta,$$

altså rent $n = 2$: to hjørner opp, to hjørner ned, og de to diagonalene $x_1 = 0$ og $x_2 = 0$ ligger flatt. Det er en salflate - potetgullformen - og det er nettopp det et fuktskadd skarptrommeskinn legger seg i. Legg merke til at $u(0) = 0$: midten ligger i null, som er gjennomsnittet av randa, akkurat som middelverdiegenskapen krever.