

12 - INDUSTRIELL ELEKTROTEKNIKK

Studiet av funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ kalles **kompleks analyse**. Dette brukes i matematisk fysikk, men anvendelsene er avanserte, så det er ikke trivielt å motivere.^{1 2 3} Skal du drive med lineær regulerings-teknikk eller avansert kvantefysikk kommer du til å trenge det. Vi skriver

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

der $z = x + yi$ er en uavhengig kompleks variabel og u og v er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Visualiserings-teknikkene er i samme gate som for koordinatavbildninger.

1 La Ω være en kvart sirkelskive med radius 2 i første kvadrant. Hvordan ser $f(\Omega)$ ut dersom

$$f(z) = z? \quad f(z) = z^2? \quad f(z) = 1/z?$$

En funksjon som hadde litt praktisk nytte tidlig i luftfartens historie var joukovskyaerofoilen:

$$f(z) = z + 1/z$$

Bildet av forskjellige sirkler under denne avbildningen ser omtrent ut som tverrsnittet av en flyvinge, og du kan faktisk estimere løftet med penn og papir hvis du er god i kompleks analyse, jf. oppgave 6 og 7 i forrige uke.⁴



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_field_theory

²https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_field_theory

³https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Joukowski_transform

Funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ oppfører seg fundamentalt annerledes enn reelle funksjoner, og dette medfører at det finnes noen ekstra triks. Vi sier at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon$$

og vi sier at f er deriverbar i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. Den aller siste oppgaven i TMA4106 var å utlede cauchyriemannlikningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

og i oppgave 20 i økt 3-2 viste du at under antagelsen om videre deriverbarhet er både u og v er harmoniske funksjoner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Dette er sant også uten antagelser om videre deriverbarhet, men det er for vanskelig for oss å bevise. Grunnen til at komplekse funksjoner er nyttige i fysikk er at de enkleste modellene for væskeflyt,⁵ stasjonær varmeledning⁶ og elektrostatikk⁷ involverer harmoniske funksjoner. Da nyttiggjør man seg følgende triks.

- 2 Real- og imaginærdelen til en kompleks deriverbar funksjon er ikke bare harmoniske funksjoner. Vis at nivåkurvene til den ene står ortogonalt på nivåkurvene til den andre.



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_flow

⁶https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

⁷https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_07.html

For hundre år siden var komplekse funksjoner uunværlige i praktisk modellering av væskeflyt, stasjonær varmeledning og elektrostatikk, og nå for tiden er de uunværlige i avansert kvantefysikk, men disse anvendelsene er i tidligste laget for oss gå løs på. Forhåpentligvis skjønner du nå at komplekse funksjoner kan brukes til noe. La oss finne ut mer om hvordan de oppfører seg.

3 Finn real- og imaginærdelene til $f(z) = z^2$ og tegn nivåkurvene deres i samme koordinatsystem.

4 Gjenta for $f(z) = \sin z$, 5 $f(z) = e^z$, 6 $f(z) = 1/z$ 7 og $f(z) = z + 1/z$.

Alt det der med cauchyriemann og så videre er en blanding av fascinerende og forvirrende når man ser det første gang. Det er mye greier med komplekse funksjoner, og vi er over i en del av matematikken som av mange betraktes mer som en form for kunst enn en form for vitenskap. Studiet av det helligste av det hellige, nemlig Riemanns ζ -funksjon⁸

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{alle primtall } p} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

er en gren av den komplekse analysen.⁹

8 Her hadde det vært artig med en oppgave om Riemanns ζ -funksjon, men jeg fant ingenting som hadde passelig vanskelighetsgrad, så du får avskrives med å bruke Cauchy-Riemann-likningene til å sjekke at $f(z) = \bar{z}$ ikke er deriverbar istedet. Skisser nivåkurvene til real- og imaginærdelen.

Arbeidshesten i kompleks funksjonsteori er det komplekse linjeintegralet:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

Her er f en kompleks funksjon og Γ en glatt kurve i det komplekse planet, parametrisert av $z(t)$. Tangentvektoren til $z(t)$ er gitt ved $z'(t)$. For eksempel er

$$z(t) = e^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

er en parametrisering av enhetssirkelen, med tangent $z'(t) = ie^{it}$.

9 Finn en parametrisering for en sirkel med radius 2 og sentrum i $1 + i$.

Det komplekse linjeintegralet oppfører seg litt som linjeintegral over vektorfelt. Regn ut

$$\int_{\Gamma} z^2 dz$$

der Γ er en

10 kvart enhetssirkel fra realaksen til imaginæraksen i det komplekse planet.

11 rett linje mellom de samme punktene som i forrige oppgave.

12 først langs den ene av disse kurvene og så tilbake langs den andre.

13 en tilfeldig kurve at ditt frie valg.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

⁹Hvis du virkelig er interessert i primtall, må du kunne kompleks funksjonsteori - du får faktisk en million dollar om du finner ut om riemannhypotesen er sann eller ikke. Gødttere enn prim som de sier på Gjøvik.
https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

Oppgave 10-13 er konstruert for at du skal oppdage noe som kalles **Cauchys integralteorem**.¹⁰ Det kan formuleres på flere måter, men det enkleste er å si at dersom f er deriverbar på Ω og Γ er en lukket stykkevis glatt kurve i Ω , er

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

- 14 Hvis du gjør som Cauchy og antar at u og v har kontinuerlige partiellderiverte (og at Γ er stykkevis glatt og alt det der) kan du faktisk vise dette fra Greens teorem. Trikset er å studere vektorfeltet $F = (u, -v)^T$.

Problemene starter hvis det inni integrasjonskurven finnes ett eller flere punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Da kan integralet bli null eller ikke.

- 15 Gjenta oppgave 10-13, men med $f(z) = \bar{z}$ istedet for z^2 .

Funksjonen i oppgave 14 er ikke deriverbar noe sted. Dette er en situasjon man ikke støter på så ofte i anvendelser. Det vanligste er at man må integrere noe som har en singularitet i et punkt z_0 . Dette er et punkt der funksjonen ikke er definert, og i kompleks analyse kalles punktet en **pol**.¹¹ Dersom integrasjonskurven omslutter en pol, kan alt skje, integralet kan bli null eller ikke.

- 16 Beregn $\int_{\Gamma} z^n dz$ for alle heltallige n , der Γ er enhetssirkelen traversert mot klokken.

- 17 Et klassisk ikke-konservativt vektorfelt er

$$f(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

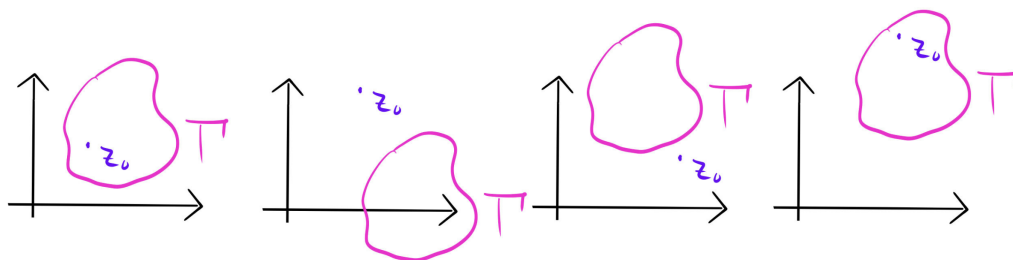
La Γ nok en gang være enhetssirkelen traversert mot klokken, og finn $\int_{\Gamma} f \cdot ds$.

- 18 Beregn $\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$ der Γ er en sirkel sentrert i z_0 med radius r for alle heltallige n .

I anvendelser er det selvfølgelig gunstig å kombinere Cauchys integralteorem med kjente resultater og lure triks heller enn å slite seg ut på antiderivasjon.

- 19 Beregn $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$ der Γ er en sirkel sentrert i 1 med radius 1. (Hint: Skriv om integranden.)

- 20 Under har jeg tegna noen kurver. Beregn $\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$ for alle kurvene og alle heltallige n .



¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_theorem

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Zeros_and_poles

Dersom f er analytisk i z_0 , er også funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

analytisk i z_0 siden grenseverdien

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

er i orden. Dette kan vi brukes til å utlede noe som kalles **Cauchys integralformel**.

- [21] Bruk Cauchys integralteorem på en enkeltsammenhengende kurve Γ som omslutter punktet z_0 , og utled formelen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Cauchys integralformel kan generaliseres til

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

men utledningen er litt mer involvert, så den dropper vi. Cauchys integralformler gir oss en smart teknikk for å beregne integraler. La Γ være enhetssirkelen, traversert mot klokken.

[22] $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$

[23] $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz$

[24] $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz$

[25] $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^4} dz$

[26] $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz$

[27] $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$

[28] $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz$

[29] $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz$

Som du ser er det et system her. Dette kommer vi tilbake til i TMA4121, når vi skal ha om residyregning. (Dere som har har regtek i høst har kanskje bruk for cauchys argumentprinsipp.¹² Etter denne økten bør det være mulig å forstå sånn nogenlunde hva det går i.)



¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Argument_principle

For å beregne integralet

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz$$

der Γ er en glatt kurve som omslutter origo, kan vi skrive

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

og integrere ledd for ledd:

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz = \int_{\Gamma} dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2} dz + \dots$$

Disse integralene har vi beregnet i TMA4111 og alle blir null unntatt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

slik at

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz = 2\pi i.$$

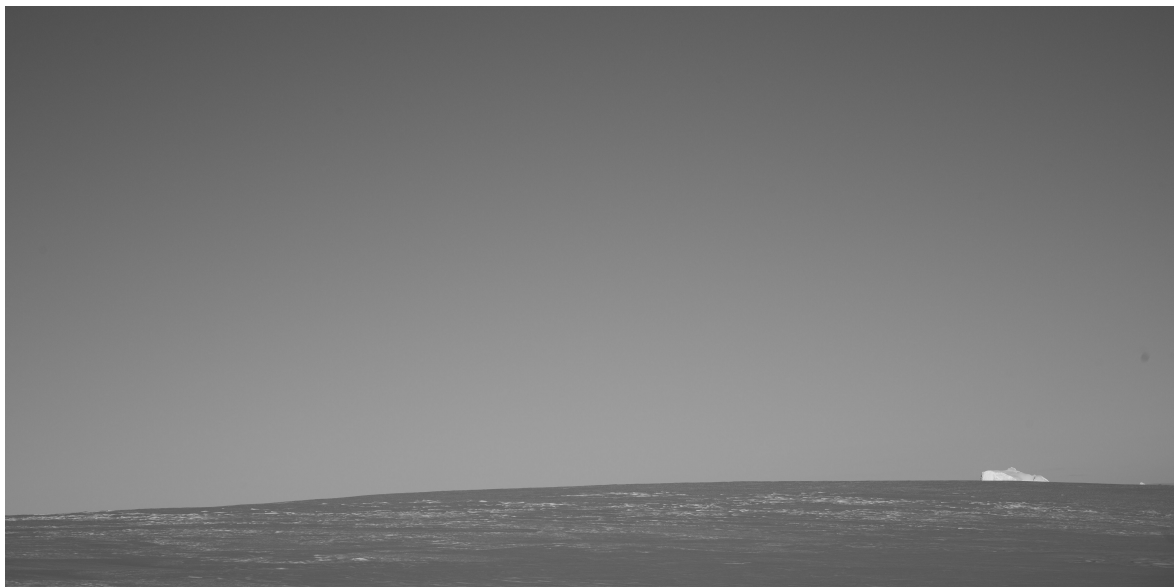
Dette er en strategi som har overraskende bred gyldighet. La prøve å bruke det samme trikset på noen andre integraler. La Γ være enhetssirkelen i det komplekse planet, traversert én gang mot klokken, og beregn

$$\boxed{1} \quad \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$$

$$\boxed{2} \quad \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz$$

$$\boxed{3} \quad \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz$$

$$\boxed{4} \quad \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$$



Tar vi utgangspunkt i maclaurinrekkene til sinus- og cosinusfunksjonen, får vi

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

og bruker vi trikset, ser vi at

$$\boxed{1} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \quad \boxed{2} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz = 0 \quad \boxed{3} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz = 0 \quad \boxed{4} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i$$

Komplekse deriverbare funksjoner oppfører seg annerledes enn alt annet du har sett. En reell funksjon kan fint ha knekk i den fjerde, femte eller attendederiverte. For eksempel eksisterer den andrederiverte til $x^3 \sin(1/x)$, men ikke den tredjederiverte. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(x^2-1)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

er glatt men ikke analytisk; alle de deriverte eksisterer overalt (selv i $x = \pm 1$), men det finnes ingen a slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots$$

på et åpent intervall som inneholder $x = 1$ eller $x = -1$. Komplekse funksjoner opplever ikke disse sjatteringene hva angår regularitet. En kompleks funksjon som er deriverbar i et punkt z_0 kan alltid skrives som en taylorrekke i en omegn rundt z_0 . Det finnes ingen mellomting mellom deriverbar og analytisk, og derfor sier vi bare **analytisk** eller **holomorf**. https://en.wikipedia.org/wiki/Holomorphic_function Funksjonene i oppgavene over har singulariteter i origo, og er derfor er de ikke analytiske, men som du ser, kan man rekkeutvikle dem om singularitetene allikevel. La Γ fortsatt være enhetssirkelen, og beregn

$$\boxed{5} \int_{\Gamma} \frac{\cos z^2}{z^5} dz \quad \boxed{6} \int_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{z^8} dz \quad \boxed{7} \int_{\Gamma} e^z + e^{1/z} dz \quad \boxed{8} \int_{\Gamma} e^{z+1/z} dz$$



En funksjon f sin rekkeutvikling om et singulært punkt med både positive og negative potenser av z kalles en **laurentrekke**.¹³ Summen av de negative potensene kalles **prinsipaldelen** til rekkeutviklingen. Vi bruker prinsipaldelen til å klassifisere singularitetene til f . Dersom den laveste negative potensen er $-n$, sier vi at det singulære punktet er en **pol av orden** n , så

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{z^8} dz = \frac{1}{z^8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{z^7} - \frac{8}{z^5 3!} + \frac{32}{z^3 5!} - \dots$$

har en pol av orden syv i origo.¹⁴ Dersom den negative delen har uendelig mange ledd, sier vi at f har en **essensiell singularitet**, slik som

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

8 Finn prinsipaldelen til

$$f(z) = e^{z+1/z}$$

Det som nå er et faktum er at om du slår en sirkel Γ om et singulært punkt z_0 og integrerer f , er det kun koeffisienten til $1/z$ som gir bidrag til integralet så lenge det ikke er andre singulære punkter innenfor Γ . Denne koeffisientene kalles **residyet** til f i z_0 og skrives

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

Så og si all integrasjon av komplekse funksjoner består av å få tak i denne koeffisienten og gange med $2\pi i$. Forresten trenger ikke Γ være en sirkel, for Cauchys integralteorem, som sier at

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

så lenge f er analytisk på en åpen enkeltsammenhengende mengde som inneholder Γ , impliserer at dersom du deformerer Γ litt, får integralet den samme verdien så lenge du ikke dytter inn noen andre singulariteter innenfor Γ . Dersom Γ omslutter flere singulariteter, legger du bare sammen residyene og ganger alt med $2\pi i$ - dette kalles **residyeteoremet**.¹⁵ Det finnes en formel for å beregne residyet uten å sette opp laurentrekken til f i z_0 . Noen ganger er det kjappere å finne residyene på denne måten, men som oftest er det enklest å manipulere laurentrekken for hvert singulære punkt til man kan lese av residyene av fra disse.

9 Finn og klassifiser polene til

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

og

10 beregn residyene

og finn

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz$$

der Γ er en glatt enkeltsammenhengende kurve som ligger omslutter

11 både $z_0 = 1$ og $z_0 = 0$. **12** $z_0 = 1$ men ikke $z_0 = 0$. **13** $z_0 = 0$ men ikke $z_0 = 1$.

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Laurent_series

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Zeros_and_poles

¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem

Den klassiske ingeniøransvendingen av residyregrning er formelen for invers laplacetransform. Dersom $x(t)$ har laplacetransform $X(s)$, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \quad ?$$

Denne har laplaceomvending, men ikke fourieromvending. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke. La oss begynne med å skrive $y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, og se at

$$X(s) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + i\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{y}(\omega)$$

Dersom vi nå velger σ slik at y kan fourieromvendes, følger det ved variabelskiftet $s = \sigma + i\omega$ at

$$x(t) = e^{\sigma t} y(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} X(s) e^{st} ds$$

Dette integralet er ikke så godt å beregne, men her kan residyteoremet hjelpe oss. La oss se på

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

I følge formelen over, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds$$

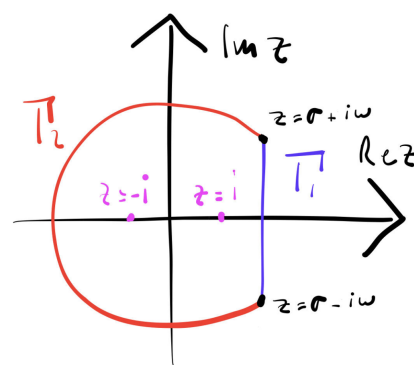
men hvis vi legger til en del av en sirkel slik at vi får en lukket kontur Γ (se figuren til høyre), kan vi bruke residyteoremet, og skrive

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds \right) = \sum \text{res} \frac{e^{st}}{s^2 + 1}$$

dersom σ er stor nok til at begge singularitetene til $1/(s^2 + 1)$ ligger inni Γ .

14 Vis at summen av residylene til $\frac{e^{st}}{s^2 + 1}$ blir $\sin t$.

15 Vis at integralet $\int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds$ går mot null når $\omega \rightarrow \infty$ på grunn av eksponentialfunksjonen i nevneren.



Cauchys integralformel åpner for en alternativ oppskrift for koeffisientene til taylorrekken til f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Høyresiden av Cauchys generaliserte integralformel gir også mening for negative n , så her har du faktisk en formel for alle leddene i laurentrekken til f .

16 Hva blir koeffisienten til $n = -1$?

Det finnes raske formler for å beregne residyer. Noen av dem er relativt enkle å utlede.

17 Hvis at dersom z_0 er en enkel pol, er

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Formelen over generaliseres til

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z).$$

18 Gjør oppgave 10 på nytt.

