

12 - TRIPPELINTEGRALER - LF

- 1 Her er det bare å antiderivere slik som i dobbeltintegraler. Husk å holde tungen beint i munnen på hvilken variabel du antideriverer:

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^2 \left(x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_2 dx_1$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^2 3x_1^2 x_2 + \frac{9}{2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{3}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{9}{2} x_2 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1 \\ &= \int_0^1 6x_1^2 + 9 dx_1 = 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11 \end{aligned}$$

Dersom integranden måles i masse per volum, forteller det innerste integralet deg hvor mye masse per areal som sitter over punktet med koordinater (x_1, x_2) . Tenk at du er geolog og driller en sedimentprøve og måler vekten av den for å estimere masse per areal under punktet der du står. Eller at du står på taket av et hus og driller ned i huset og veier - treffer du bare isolasjon og luft er det lav vekt per areal, treffer du tilfeldigvis mønsåsen eller en sperre eller en laftestokk eller midt i en vegg, er det høyere vekt per areal.



For å forstå de to innerste integralene må du tenke at du står ved siden av huset og lurar på hvor mye masse det er i huset per meter hus, tenk at du kapper huset med en motorsag på forskjellige steder, og måler masse per meter for hvert tverrsnitt bortover.



2 Her er en annen rekkefølge:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_2 dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 \left(\frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 2x_1^2 + 2x_3 \, dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \left(2x_1^2 x_3 + x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_1 \\
 &= \int_0^1 6x_1^2 + 9 \, dx_1 \\
 &= 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11
 \end{aligned}$$

Jeg sa du skulle gjøre det på alle seks måter, men det er vel litt overkill. Over en boks er rekkefølgen likegyldig, og svaret er det samme hver gang.

3 Planet som går gjennom $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$ er $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, og dette skjærer $x_1 x_2$ -planet i linjen $x_2 = 1 - x_1$. Det innerste integralet, altså det som regner ut masse per areal over et punkt i $x_1 x_2$ -planet, er

$$\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3.$$

Denne funksjonen må nå dobbeltintegreres over korrekt område i $x_1 x_2$ -planet:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1$$

Å regne det ut er bare å gjøre som i oppgave 2, huske å merke tydelig hva som skal inn i hvilken variabel slik:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left(x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=1-x_1-x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1^2 x_2 (1 - x_1 - x_2) + \frac{1}{2} (1 - x_1 - x_2)^2 \, dx_2 dx_1.
 \end{aligned}$$

Det neste integralet blir penere om du skriver $a = 1 - x_1$ for den øvre grensen:

$$\int_0^a x_1^2 x_2 (a - x_2) + \frac{1}{2} (a - x_2)^2 \, dx_2 = x_1^2 \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6} (1 + x_1^2) (1 - x_1)^3,$$

og til slutt

$$\frac{1}{6} \int_0^1 (1 + x_1^2) (1 - x_1)^3 \, dx_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{60} \right) = \frac{2}{45}.$$

Det siste integralet er greiest å ta med substitusjonen $u = 1 - x_1$, så står det $\int_0^1 (1 + (1 - u)^2) u^3 \, du$.

- 4 Dette området ser ut som pyramiden i Giza, og flaten $x_3 = 1 - |x_1| - |x_2|$ skjærer x_1x_2 -planet i $|x_1| + |x_2| = 1$. Det konseptuelt enkleste er å brute-force integralet og sette opp ett integral for hver kvadrant i x_1x_2 -planet:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_{-1}^0 \int_0^{1+x_1} \int_0^{1+x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_{-1}^0 \int_{-1-x_1}^0 \int_0^{1+x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + \int_0^1 \int_{-1+x_1}^0 \int_0^{1-x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Det er mye arbeid, så det lønner seg å tenke først. Pyramiden er symmetrisk om planet $x_2 = 0$, og leddet $x_1^2 x_2$ skifter fortegn når x_2 gjør det, så det integrerer til null - det som er positivt på den ene siden er negativt på den andre. Da står vi igjen med $\iiint_{\Omega} x_3$, og det tar vi lagvis: i høyden x_3 er tverrsnittet kvadratet $|x_1| + |x_2| \leq 1 - x_3$, som har diagonaler $2(1 - x_3)$ og dermed areal $2(1 - x_3)^2$, så

$$\iiint_{\Omega} f = \iiint_{\Omega} x_3 = \int_0^1 x_3 \cdot 2(1 - x_3)^2 \, dx_3 = \frac{1}{6}.$$

Samme lagvise regning gir volumet $\int_0^1 2(1 - x_3)^2 \, dx_3 = 2/3$, som stemmer med grunnflate ganger høyde delt på tre.

- 5 Vi tar tetraederet først. Massen er

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} 1 - x_1 - x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 \left(x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\ &= \rho \int_0^1 1 - x_1 - x_1(1 - x_1) - \frac{1}{2}(1 - x_1)^2 \, dx_1 = \frac{\rho}{6} \end{aligned}$$

(dette kunne vi også funnet med formelen for volum av pyramide) slik at massesenteret blir

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) \, dx \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix}.$$

Dette ser ut som tre forskjellige integraler, men på grunn av symmetrien i problemet er det egentlig bare ett. Vi beregner

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1(1-x_1-x_2) \, dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 x_1 \left(x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1(1-x_1)^2 \, dx_1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

og massesenteret sitter følgelig i

$$6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Pyramiden i oppgave 4 er symmetrisk om både $x_1 = 0$ og $x_2 = 0$, så sentroiden ligger på x_3 -aksen, og vi har allerede regnet ut $\iiint_{\Omega} x_3 = 1/6$ og volumet $2/3$, så den sitter i $(0, 0, 1/4)$. Begge sentroidene ligger en fjerdedel av veien opp fra grunnflaten - det gjelder for alle pyramider og kjegler, slik tyngdepunktet til en trekant ligger en tredjedel av veien opp.

- 6 Dette blir helt forferdelig. Legger vi den flate siden i $x_1 x_2$ -planet, er

$$\iiint_{\Omega} f = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \int_0^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} f(x) \, dx_3 dx_2 dx_1,$$

og massesenteret blir

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} 1} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \\ \iiint_{\Omega} x_2 \\ \iiint_{\Omega} x_3 \end{pmatrix}$$

med disse grensene i alle fire integralene - den konstante tettheten kansellerer. Av symmetri er de to første null, og nevneren er $2\pi/3$, men x_3 -komponenten må regnes ut, og det er ikke fristende med røtter i alle grensene. Vi kommer tilbake til den i oppgave 13.

- 7 Avbildningen er lineær, så den sender enhetskuben på parallelepipedet utspent av kolonnene, og volumet er determinanten til matrisen ganget med volumet til enhetskuben, altså

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 4.$$

Jacobideterminanten er konstant, så det er ingenting å integrere.

8

$$|g'(s, \theta, z)| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -s \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & s \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = s \cos^2 \theta + s \sin^2 \theta = s.$$

Det er polarkoordinatenes r med en z -akse hengt på: volumelementet er $s \, ds \, d\theta \, dz$.

- 9] Integrasjonsområdet er bildet av en rektangulær boks under sylinderkoordinatavbildningen, så dette integralet blir veldig greit:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (s^2 + z^2) s \, ds \, d\theta \, dz &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3 + s z^2 \, ds \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} s^4 + \frac{1}{2} s^2 z^2 \right)_{s=0}^{s=3} d\theta \, dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} + \frac{9}{2} z^2 \, d\theta \, dz \\ &= 2\pi \int_0^5 \frac{81}{4} + \frac{9}{2} z^2 \, dz = \pi \left(\frac{5 \cdot 81}{2} + 125 \cdot 3 \right) = \frac{1155\pi}{2}. \end{aligned}$$

- 10] Funksjonen

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = s$$

ser ut som en fotballkjegle som står på hodet, og skjærer kuleskallet

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{1 - s^2}$$

i $s = 1/\sqrt{2}$, så volumet er

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s \, dz \, ds \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (\sqrt{1-s^2} - s) s \, ds \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} s\sqrt{1-s^2} - s^2 \, ds \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2} - \frac{1}{3}s^3 \right)_{s=0}^{s=1/\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}((1/2)^{3/2} - 1) - \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} d\theta = \frac{2}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

På grunn av oppgaveformuleringen sitter det et identisk volum på undersiden av $x_1 x_2$ -planet - kjeglen $x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2$ er en dobbeltkjegle - så korrekt volum blir

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s \, dz \, ds \, d\theta = \frac{4}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

I kulekoordinater er det enda enklere: kjeglen er $\varphi \leq \pi/4$, så den øvre halvparten er $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi$
 $\frac{2\pi}{3} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)$, jf. neste side.

- 11 Ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ blir $0 \leq z \leq 1 - s$ i sylinderkoordinater. Denne kjeglen står motsatt av den i forrige oppgave og skjærer x_1x_2 -planet i enhetssirkelen. Siden $x_2 \geq 0$ er kjeglen kappet i to langs et vertikalt plan gjennom midten av kjeglen, så integralet blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{1-s} z s \, dz \, d\theta \, ds &= \int_0^1 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} z^2 s^2 \right)_{z=0}^{z=1-s} d\theta \, ds \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1-s)^2 s^2 \, d\theta \, ds \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-s)^2 s^2 \, ds = \frac{\pi}{60}. \end{aligned}$$

12

$$|g'(r, \theta, \varphi)| = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \varphi,$$

så volumelementet blir $r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$. Minustegnet betyr bare at (r, θ, φ) i denne rekkefølgen er et venstrehåndssystem; bytter du om på θ og φ , blir determinanten positiv. Faktoren $r^2 \sin \varphi$ er flateelementet til kuleskallet fra økt 11 ganget med tykkelsen dr .

- 13 Massesenteret er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) \, dx \end{pmatrix}.$$

Vi tar den kvarte kula først. En kvart enhetskule i kulekoordinater som ligger slik at $x_2 \geq 0$ og $x_3 \geq 0$, beskrives av ulikhetene

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

og siden massetettheten er konstant, kansellerer denne. På grunn av symmetri vet vi at x_1 -koordinaten er 0:

$$\iiint_{\Omega} x_1 \, dx = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr = 0$$

samt at x_2 - og x_3 -koordinatene må være like:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} x_2 \, dx &= \iiint_{\Omega} x_3 \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi} r^3 \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

Volumet til en kvart enhetskule er $\pi/3$, så vi kan nå beregne

$$\frac{\rho \iiint_{\Omega} x_2 \, dx}{\rho \iiint_{\Omega} dx} = \frac{\pi/8}{\pi/3} = \frac{3}{8}$$

slik at massesenteret sitter i $(0, 3/8, 3/8)$. Dette skalerer selvfølgelig til vilkårlig radius, slik at om radien er r er massesenteret i $(0, 3r/8, 3r/8)$. For en åttendels kule er det bare å bytte ut π med $\pi/2$ i integrasjonsgrensene for θ og bruke at alle koordinatene må være like, slik at massesenteret sitter i $(3/8, 3/8, 3/8)$. Samme med halvkulen, bruk symmetri og bruk 2π som øvre grense i θ og oppdag at massesenteret sitter i $(0, 0, 3/8)$. Det er svaret på oppgave 6 også - og lavere enn det halve kuleskallet i økt 11, som har massesenter i høyden $1/2$, siden den massive halvkula har mest masse nederst.

- 14 Her er det nok best å bruke sylinderkoordinater. Flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ blir $z = \sqrt{s^2 - 4}$ i sylinderkoordinater, altså $s = \sqrt{4 + z^2}$, så vi kan integrere oss langs s fra $s = 0$ til $s = \sqrt{4 + z^2}$ innerst, og få

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4+z^2}} s \, ds \, d\theta \, dz = \pi \int_0^{\sqrt{5}} 4 + z^2 \, dz = \frac{17\sqrt{5}}{3} \pi.$$

Flaten er en hyperboloide med hals av radius 2 i $x_3 = 0$ og radius 3 i $x_3 = \sqrt{5}$, så volumet ligger mellom $4\pi\sqrt{5}$ og $9\pi\sqrt{5}$, som det skal.

- 15 Når φ går fra 0 til π , går $\cos \varphi$ fra 1 til -1 , så likningen

$$r = 4 - \cos(\varphi)$$

beskriver en slags litt pæreformet sak i $\mathbb{R}^3$, med radius 3 på toppen og 5 i bunnen. Det er nok best å integrere seg fra 0 til denne flaten i r først. Volumet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{4-\cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (4 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{6} (5^4 - 3^4) = \frac{272\pi}{3},$$

der substitusjonen $u = 4 - \cos \varphi$ gjør det siste integralet til $\int_3^5 u^3 \, du$.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Del D opp i små bokser med sider h_1 , h_2 og h_3 . Hver boks sendes av g til en liten, litt skjev bit av Ω , og til første orden er $g(x + h_k e_k) \approx g(x) + h_k \partial_{x_k} g$, så biten er omtrent parallelepipedet utspent av $h_1 \partial_{x_1} g$, $h_2 \partial_{x_2} g$ og $h_3 \partial_{x_3} g$. Volumet av et parallelepiped er tallverdien av trippelproduktet, så

$$\text{volumet av biten} \approx |\partial_{x_1} g \cdot \partial_{x_2} g \times \partial_{x_3} g| h_1 h_2 h_3,$$

og summerer vi over alle boksene og lar dem bli små, står vi med riemannsummen til integralet. Trippelproduktet er determinanten til matrisen med de tre tangentene som kolonner, altså jacobideterminanten $\det g'(x)$ - det er samme formel som i teksten over.

Kulekoordinatene $g(r, \theta, \varphi) = r(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)^T$ sender boksen $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ på kula, og

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

De tre står vinkelrett på hverandre med lengder 1, $r \sin \varphi$ og r , så trippelproduktet har tallverdi $r^2 \sin \varphi$ (jf. oppgave 12), og

$$\iiint_{\Omega} dy = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Legg halvkula med den flate siden ned, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Av symmetri ligger massesenteret på x_3 -aksen, den konstante tettheten kansellerer, og med $x_3 = r \cos \varphi$ er

$$\iiint_{\Omega} x_3 \, dy = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r \cos \varphi \, r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Volumet er $2\pi R^3/3$, så massesenteret er $(0, 0, 3R/8)^T$, jf. oppgave 13. Lavere enn halvveis, naturligvis - det er mest masse nederst.

- 2 Vi bruker samme parametrisering som for overflaten i økt 11, men lar tverrsnittsradien variere:

$$g(s, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (r_1 + s \cos \varphi) \cos \theta \\ (r_1 + s \cos \varphi) \sin \theta \\ s \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (s, \theta, \varphi) \in [0, r_2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Tangentene

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = (r_1 + s \cos \varphi) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = s \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

står innbyrdes vinkelrett med lengder 1, $r_1 + s \cos \varphi$ og s , så jacobideterminanten har tallverdi $s(r_1 + s \cos \varphi)$ - polarkoordinater i tverrsnittet, ganget med hvor langt punktet reiser rundt hovedaksen. Volumet er

$$\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} s(r_1 + s \cos \varphi) \, d\varphi \, d\theta \, ds = 4\pi^2 r_1 \int_0^{r_2} s \, ds = 2\pi^2 r_1 r_2^2,$$

siden $\cos \varphi$ integrerer til null. Det er tverrsnittsarealet πr_2^2 ganger veien $2\pi r_1$ tverrsnittets sentrum reiser - samme regel som for overflaten.

- 3 Den skrå siden er planet $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, så tetraederet er $0 \leq x_3 \leq 2 - x_1 - x_2$ over trekanten $0 \leq x_2 \leq 2 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 2$. Volumet er $\frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$, og

$$\iiint_{\Omega} x_1 \, dx = \int_0^2 \int_0^{2-x_1} \int_0^{2-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^2 x_1 \frac{(2-x_1)^2}{2} \, dx_1 = \frac{2}{3},$$

så $\bar{x}_1 = \frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}$. Av symmetri er de to andre koordinatene like, og massesenteret er $\frac{1}{2}(1, 1, 1)^T$. Det er gjennomsnittet av de fire hjørnene - sentroiden til et tetraeder ligger alltid der, en fjerdedel av veien fra hver side til det motsatte hjørnet, jf. oppgave 5.

- 4 Flatene skjærer hverandre der $x_1^2 + 3x_2^2 = 4 - 3x_1^2 - x_2^2$, altså på sylindren $x_1^2 + x_2^2 = 1$, så Ω ligger over enhetssirkelskiven D , og høyden er

$$(4 - 3x_1^2 - x_2^2) - (x_1^2 + 3x_2^2) = 4(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

I polarkoordinater blir volumet

$$\iint_D 4(1 - x_1^2 - x_2^2) \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4(1 - s^2) s \, ds \, d\theta = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 2\pi.$$

Rimelig: den maksimale høyden er 4 over et areal på π , og en paraboloid fyller halvparten av sin omskrevne sylinder.

- 5 Den skrå siden er planet gjennom $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ og $(0, 0, 2)^T$, altså $x_3 = 2(1 - x_1 - x_2)$, og over $x_1 x_2$ -planet står tetraederet på trekanten $0 \leq x_2 \leq 1 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$. Massen er

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho \, dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{2(1-x_1-x_2)} (2-x_3) \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} 4(1-x_1-x_2) - 2(1-x_1-x_2)^2 \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 2(1-x_1)^2 - \frac{2}{3}(1-x_1)^3 \, dx_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Volumet er $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$, så gjennomsnittstettheten er $3/2$, som er nøyaktig tettheten i sentroiden $(1/4, 1/4, 1/2)^T$: en lineær tetthet integrerer til verdien i sentroiden ganger volumet.