

11 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM

Arbeidet en kraft f gjør på noe som reiser langs kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, får vi ved å prikke med enhetstangentvektoren til Γ og linjeintegreere:

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot T(t) |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b f_1(x(t)) \dot{x}_1(t) + f_2(x(t)) \dot{x}_2(t) dt$$

Husk ellers definisjonen av partiellderivert:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_1(x_1, x_2 + h_2) - f_1(x_1, x_2)}{h_2}$$

Det må være klart at dersom f er kraft, får de partiellderiverte benevnning kraft per meter. I statikken som byggingeniørene lærer kalles kombinasjonen av $f_1(x_1, x_2 + h_2)$ og $f_1(x_1, x_2)$ et **kraftpar**. Dette skal vi bruke til å tolke de partiellderiverte i jacobimatrisen til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- 1 Anta du har et bitte lite kvadrat med hjørner i $(x_1 \pm h, x_2 \pm h)^T$. Anta kraften omtrent konstant på hver av sidekantene og finn det totale arbeidet f gjør på en partikkel som reiser én gang rundt kanten.

Analysens fundamentalteorem kommer i mange flere varianter enn den du lærte på skolen. I denne økten skal vi ta unna en variant som heter **Greens teorem**. Den kommer i to ekvivalente versjoner. La oss studere uttrykket

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

- 2 Hvis kvadratet i oppgaven over hadde vært basen i en todimensjonal riemannsumskyskraper, hva er volumet? Hva er sammenhengen mellom dette volumet og arbeidet du fant?



Gjorde du forrige side sånn nogenlunde, kom du frem til at volumet under

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

på et lite område gir deg arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt kanten av området. Greens teorem sier at volumet under den på Ω gir deg arbeidet rundt $\partial\Omega$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds$$

Her er det selvfølgelig masse betingelser - $\partial\Omega$ må være stykkevis glatt, enkeltsammenhengende og traversert mot klokken, og kraftfeltet f må ha kontinuerlige partiellderiverte på en åpen omegn som inneholder $\partial\Omega$. Alt dette står i Arnes bok om du er interessert.

- 3 En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn det totale arbeidet kraften gjør på noe som reiser langs én gang rundt en sirkel sentrert i $(1, 1)^T$ med radius 1. Regn ut arbeidet både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den laminære vannstrømmen over gir oss faktisk et lurt triks for å beregne arealet av Ω .

- 4 Bruk Greens teorem til å vise at arealet av Ω er

$$\int_a^b x_1(t) \dot{x}_2(t) dt$$

dersom $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriserer $\partial\Omega$ mot klokken. Finn arealet omsluttet av **asteroiden** $x(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$.



I begynnelsen er det ikke så godt å huske om arbeidet per areal er gitt ved

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

og det er bare konvensjon som gjør at Greens teorem skrives opp med den første og ikke den andre. Derfor skal vi begynne å bruke ∇ -operatoren til å lage noen enkle huskereglar. Da må vi først ta et gjensyn med en gammel fiende - **kryssproduktet**.¹

5 Kryssproduktet mellom to vektorer x og y kan skrives som et matrise-vektorprodukt

$$y \times x = Sx.$$

der $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Hva blir S ?

Matrisen S er lett å huske, og gir oss derfor den mest praktiske formelen for kryssproduktet. Vi skal få god nytte av denne matrisen dette året. Nå skal vi sette inn ∇ for y og definere **rotasjonen**² til $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Hvis du ser nøye på denne, ser du at tredjekomponenten er innmaten i dobbeltintegralet i Greens teorem.³ Vi tenker derfor på uttrykket

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

som rotasjonen til vektorfeltet

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

og dette er underforstått slik at vi kan skrive $\nabla \times f$ uansett om f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ eller en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. I førstnevnte tilfelle tenker nok mange på rotasjonen som en skalar siden $\nabla \times f$ alltid er parallell med x_3 -aksen. Dette kommer vi tilbake til i TMA4121.

6 polarkoordinattransformasjonen. 7 det elektriske feltet fra en punktladning.

8 den laminære vannstrømmen $f(x) = (x_3, 0, 0)^T$.

9 det meningsløse vektorfeltet $f(x) = (x_2, x_3, x_1)^T$ fra forrige eksamen i TMA4121.

10 et konservativt vektorfelt. 11 Ax der $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. 12 Ax der A er symmetrisk.

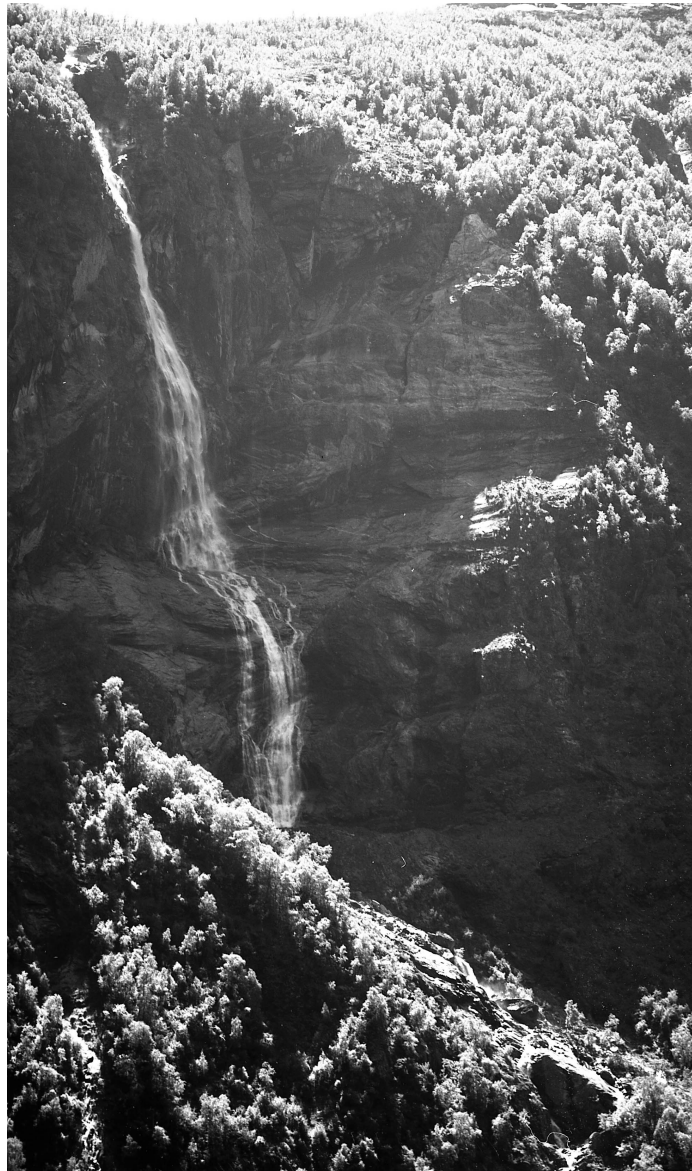
¹https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics))

³Dette er ikke tilfeldig - Greens teorem er et spesialtilfelle av en tredimensjonal variant som kalles Stokes' teorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes%27_theorem
Dette kommer vi tilbake til.

I økt 3-1 satte vi opp enhetstangent- og enhetsnormalvektor til en kurve Γ , og i økt 3-5 fant vi arbeidet en kraft gjør på noe som reiser langs Γ ved å prikke kraften med enhetstangenten og linjeintegrere. I forrige økt koblet vi dette integralet på rotasjonen til et vektorfelt. Nå skal vi se hva som skjer når vi prikker med normalvektoren istedet for tangentvektoren, og koble dette på divergensen til vektorfeltet. Det leder til en annen versjon av Greens teorem.

- 1 Du står i en elv med vadebukser. Elven har konstant dybde på én meter, og elvens fart i meter per sekund er gitt ved $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Du har en kurve Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ og du lurar på hvor mye vann som krysser denne kurven per tidsenhet.



Fluksen⁴ til vektorfeltet f over Γ får vi ved å prikke med enhetsnormalvektoren og integrere:

$$\int_{\Gamma} f \cdot N ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot N(t) |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b f_1(x(t)) \dot{x}_2(t) - f_2(x(t)) \dot{x}_1(t) dt$$

Men her må vi være litt forsiktige. I økt 3-1 satte vi opp normalvektoren som den deriverte av enhetstangenten. Grunnen til dette er at retningen til normalvektoren forteller hvilken vei kurven krummer og lengden gir oss om kurvens krumning.

2 Regn ut normalvektoren til $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

og forklar hvorfor vi må være forsiktige med å bruke denne definisjonen av normalvektor i fluksintegralet.

Derfor er vi nødt til å innføre litt ny notasjon. Det er vanlig å skrive

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, og dette skal vi gjøre. I tråd med denne konvensjonen setter vi e_n til å bety **enhetsnormalvektoren ut fra $\partial\Omega$** . Dersom $\Omega \in \mathbb{R}^2$ må vi altså være litt forsiktige med hvordan denne beregnes. Det finnes en tilsvarende formel for utnormalvektoren til flater i $\mathbb{R}^3$, dette kommer vi tilbake til i økt 3-12.

3 Finn e_n når Ω er enhetssirkelskiven i $\mathbb{R}^2$. Hva om Ω er en ellipse istedet? Enhetskulen i $\mathbb{R}^3$?



⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Flux>

Divergensen

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

gjør en liknende jobb for fluksen som rotasjonen gjør for arbeidet.

- 4 Ta rektangelet fra forrige økt og anta finn sånn omtrent den totale fluksen ut av rektangelet.

Divergensen er et mål på hvor mye vektorfeltet ekspanderer i hvert punkt, og Greens teorem kan også formuleres som at volumet under divergensen til f på Ω skal være lik f sin fluks ut av $\partial\Omega$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n ds$$

- 5 En bortadgående laminær vannstrøm har hastighet gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn den totale fluksen ut av sirkelen sentrert i $(1,1)^T$ med radius 1. Regn ut fluksen både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Dersom divergensen til f er null overalt, sier vi at f er divergensfritt. Det skjer i den virkelige verden dersom f er en inkompressibel væske. Vann er for eksempel så og si inkompressibelt, mens gass er alt annet enn inkompressibelt.

- 6 En viktig klasse skalarfelter har divergensfritt gradientfelt. Hva slags skalarfelter er dette?

Dersom rotasjonen til t er null, sier vi at f er **rotasjonsfritt**. Gravitasjonskraften og coulombkraften er begge rotasjonsfrie.

- 7 Vis at et konservativt vektorfelt er rotasjonsfritt.

