

11 - FLATEINTEGRALER - LF

- 1] Avbildningen er lineær, så den sender enhetskvadratet på parallelogrammet utspent av kolonnene $(2, 1, 1)^T$ og $(1, 2, 1)^T$, med ett hjørne i origo - en flat bit av planet gjennom origo som inneholder de to kolonnene. Normalvektoren er kryssproduktet $(2, 1, 1)^T \times (1, 2, 1)^T = (-1, -1, 3)^T$.
- 2] Sylinderskallet med radius 1 og høyde 1 rundt x_3 -aksen, uten lokk og bunn: θ tar deg rundt, z tar deg opp.
- 3] Enhetskuleskallet. θ er lengdegraden og φ vinkelen ned fra nordpolen, så $\varphi = 0$ er nordpolen, $\varphi = \pi/2$ ekvator og $\varphi = \pi$ sydpolen.
- 4] Hvis vi tenker at kuppelen står vertikalt slik som på en typisk bygning, kan vi bruke p som radius i høyden z og gjøre noe slikt:

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} p(z) \cos \theta \\ p(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

med definisjonsmengde $[0, 2\pi) \times [1/10, 1]$. Vi begynner i $z = 1/10$ fordi p er negativ på $[0, 1/10)$. I $z = 1/10$ er $p = 0$, så kuppelen står på en spiss, buler ut til radius $p \approx 1.93$ ved $z \approx 0.28$ og smalner så av til en spiss i $z = 1$. Snu den om du vil ha spissen opp - bytt z med $1 - z$.

- 5] Funksjonen i oppgave 1 er en lineæravbildning, så flateelementet er konstant, og du ganger bare arealet av definisjonsmengden med

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11},$$

og vips så har du arealet av flaten. For sylinderflaten beregner vi

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1,$$

så arealet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 dz d\theta = 2\pi.$$

Parametriseringen til enhetskuleskallet er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

slik at flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = \sin \varphi.$$

Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra. Nå er det bare å integrere:

$$\iint_{\Sigma} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 4\pi.$$

Er radien r , justerer vi bare parametriseringen slik:

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

og regner likeledes ut at

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = r^2 \sin \varphi \quad \text{og} \quad \iint_{\Sigma} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 4\pi r^2.$$

Kuppelen er en rotasjonsflate, og for $g(\theta, z) = (p(z) \cos \theta, p(z) \sin \theta, z)^T$ er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = p(z) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p'(z) \cos \theta \\ p'(z) \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} = p(z) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -p'(z) \end{pmatrix},$$

så flateelementet er $p(z)\sqrt{1+p'(z)^2}$ og arealet

$$\int_{1/10}^1 \int_0^{2\pi} p(z) \sqrt{1+p'(z)^2} \, d\theta \, dz = 2\pi \int_{1/10}^1 p(z) \sqrt{1+p'(z)^2} \, dz \approx 24.3.$$

Formelen er den gamle for rotasjonsflater - omkretsen $2\pi p$ ganger buelengdeelementet $\sqrt{1+p'^2} \, dz$ - og med $p'(z) = 40(z-1)^4 + 4(40z-4)(z-1)^3$ er integralet et tilfelle for numerisk integrasjon.

6 Parametrisering for et kuleskall med radius 9 er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 9 \cos \theta \sin \varphi \\ 9 \sin \theta \sin \varphi \\ 9 \cos \varphi \end{pmatrix},$$

men vi må finne en fornuftig definisjonsmengde. Dersom $x_3 = 2$, er $\varphi = \arccos 2/9$, så definisjonsmengden blir $[0, 2\pi) \times [0, \arccos 2/9]$, og arealet blir

$$\iint_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(2/9)} 81 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \cdot 81 \cdot (1 - 2/9) = 126\pi.$$

Det er $2\pi R h$ med $R = 9$ og høyden $h = 7$ på kalotten - Arkimedes' gamle formel: arealet av et kulebelte avhenger bare av høyden, ikke av hvor på kula det sitter.

7 La oss gå for det ideelle gasslovtaket, det blir mer enn komplisert nok. Taket er gitt ved $f(x) = x_1 x_2$ over den kvarte ellipseskiven med halvaksler 4 og 3, så en fin parametrisering er

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} 4r \cos \theta \\ 3r \sin \theta \\ 12r^2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix},$$

med definisjonsmengde $[0, 1] \times [0, \pi/2]$. Flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \cos \theta \\ 3 \sin \theta \\ 12r \sin 2\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4r \sin \theta \\ 3r \cos \theta \\ 12r^2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \right| = 12r \sqrt{1 + 16r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta}.$$

Jeg må innrømme at jeg ikke gadd å beregne kryssproduktet over; jeg brukte en annen formel. Dersom flaten Σ faktisk er grafen til et skalarfelt f , er

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

en finfin parametrisering, og flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + (\partial_{x_1} f)^2 + (\partial_{x_2} f)^2}.$$

Sett opp denne og bytt koordinater slik som i økt 9 og vips så har du flateelementet. Arealet av taket blir

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} 12r \sqrt{1 + 16r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \, dr \approx 24.3,$$

som ikke er helt godt å beregne for hånd, men trivielt med numeriske metoder. Vekten er massetettheten ganger dette. Til sammenlikning er grunnflaten $3\pi \approx 9.4$, så taket er over dobbelt så stort som skyggen sin - det er bratt ute ved hjørnet, der $|\nabla f| = |x| = 4$.

8 Overflatearealet til det halve enhetskuleskallet er 2π , og massesenteret blir

$$\frac{1}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Halvveis opp, altså - høyere enn den massive halvkula i økt 12, der massesenteret ligger i $3/8$, siden skallet har like mye masse i hvert høydebelte.

9 La oss si at radien er r . Vi beregner

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

som peker rett ut fra aksen, og delt på r er den en enhetsvektor. Dersom du tenker at sylindren har en topp og en bunn på konstante verdier av z , kan du parametrisere disse enkelt. La oss si at bunnen er i $z = 0$, da får du

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og du kan selv sjekke at normalvektoren blir

$$e_n = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alt etter hvilken vei du ganger sammen tangentene - utnormalen er $-e_3$ i bunnen og e_3 på toppen.

10 Vi beregner

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin^2 \varphi \\ -\sin \theta \sin^2 \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix},$$

å nei å nei det ble visst inn-normalvektor. Vi prøver igjen med mere hell:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin^2 \varphi \\ \sin \theta \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \sin \varphi g(\theta, \varphi).$$

Utnormalen til enhetskula er altså $e_n = g$, posisjonsvektoren selv, og på en kule med radius r er den x/r .

11 La oss ta et tetraeder Ω i første oktant begrenset av koordinatplanene og et skrått plan som skjærer koordinataksene i $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ og $(0, 0, 3)$. En parametrisering for det skrå planet er for eksempel

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 - 3x_1 - 3x_2/2 \end{pmatrix}$$

og utnormalvektoren blir

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parametriseringer for de andre flatene er for eksempel

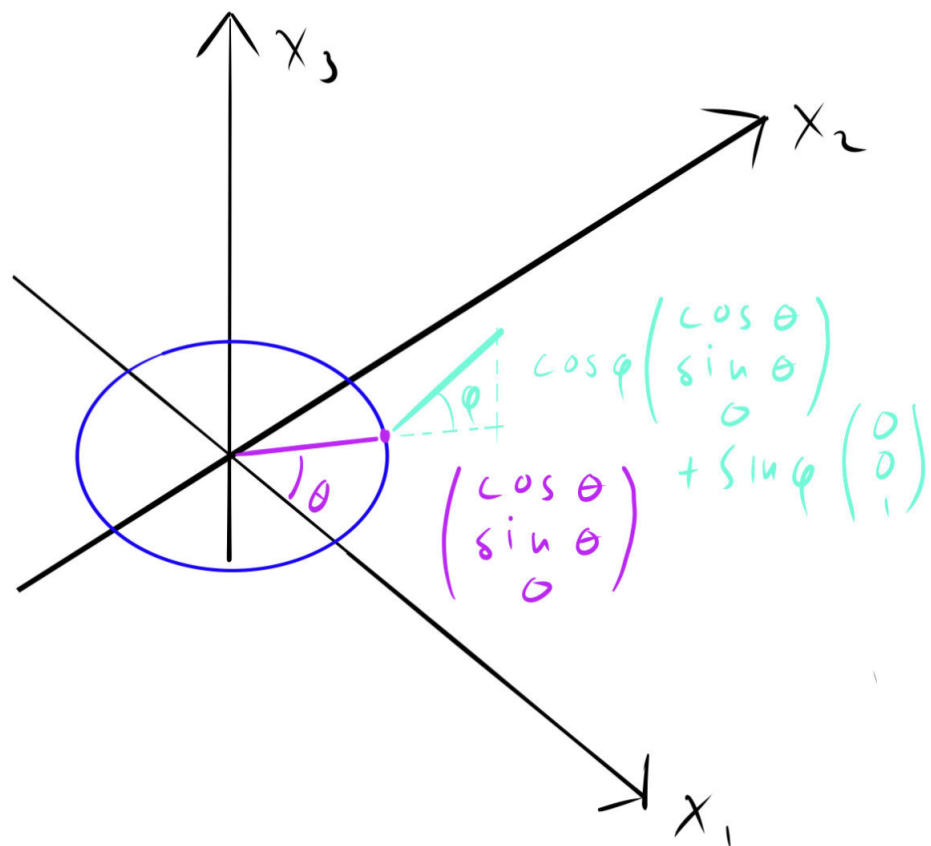
$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

for den i x_1x_2 -planet og

$$g(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for den i x_1x_3 -planet og så videre, med utnormaler $-e_3$, $-e_2$ og $-e_1$ - pass på at kryssproduktet peker ut av tetraederet og ikke inn.

12 Vi kan lage parametrisering for en smultring ved å se på følgende figur:



Setter vi sammen en lineærkombinasjon av disse slik:

$$g(\theta, \varphi) = r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \varphi) \cos \theta \\ (r_1 + r_2 \cos \varphi) \sin \theta \\ r_2 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

blir bildet av $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ under g en smultring dersom $r_2 < r_1$:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Torus>

Tangentene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = r_2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix},$$

og kryssproduktet er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} = r_2 (r_1 + r_2 \cos \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

altså den andre vektoren i lineærkombinasjonen over ganget med en positiv skalar: utnormalen peker rett ut fra tverrsnittets sentrum, som den skal.

13 Vektorfeltet er

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La Ω være cylinderen fra oppgave 9. Vi må regne ut

$$\iint_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, dS = \iint_{\text{Topp}} f \cdot e_n \, dS + \iint_{\text{Bunn}} f \cdot e_n \, dS + \iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot e_n \, dS.$$

De to første integralene er null siden f står ortogonalt på utnormalvektorene på topp og bunn, jf. oppgave 9. Fluksen ut sylinderflaten blir også null, men det får vi nesten beregne, la oss si at radien er r og høyden h :

$$\iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot e_n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h z r \cos \theta \, dz \, d\theta = 0.$$

Det som strømmer inn på den ene siden strømmer ut på den andre. Slik går det for kula også: $f \cdot e_n = x_3 x_1 = \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta$, og $\cos \theta$ integrerer til null over en runde. For tetraederet i oppgave 11 er $f \cdot e_n$ null på de to koordinatplanene $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$, så bare planet $x_1 = 0$ og det skrå planet teller. Gjennom planet $x_1 = 0$, med utnormal $-e_1$, er fluksen

$$- \iint x_3 \, dx_2 \, dx_3 = -3$$

over trekanten $x_2/2 + x_3/3 \leq 1$, som har areal 3 og tyngdepunkt i høyden $x_3 = 1$, og gjennom det skrå planet, der $f \cdot (3, 3/2, 1)^T = 3x_3$ og $x_3 = 3 - 3x_1 - 3x_2/2$, er den

$$\iint 3(3 - 3x_1 - 3x_2/2) \, dx_1 \, dx_2 = 3$$

over trekanten $x_1 + x_2/2 \leq 1$, som har areal 1 og tyngdepunkt der $x_3 = 1$. Begge ganger brukte vi at en lineær funksjon integrert over en trekant er arealet ganger verdien i tyngdepunktet. Summen er null. Smultringen går på samme måte som kula, $f \cdot e_n = r_2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta$, og $\cos \theta$ integrerer til null. Alle disse integralene lar seg fint beregne, men det finnes et triks for å finne ut av det raskere. Dette trikset kalles divergensteoremet: fluksen ut av Ω er integralet av $\nabla \cdot f$ over Ω , og her er $\nabla \cdot f = \partial_{x_1} x_3 = 0$. Vi kommer tilbake til det.

14 Coulombfeltet fra en punktladning q plassert i origo er:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og parametriseringen til et kuleskall med radius r er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

slik at utnormalvektoren blir (merk rekkefølgen på faktorene slik at vi får ut- og ikke inn-normalvektor)

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = r^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Så beregner vi

$$E(g(\theta, \varphi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Til slutt er det bare å integrere:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} E \cdot e_n \, dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \varphi + \sin^2 \theta \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Svaret er uavhengig av r - det er Gauss' lov.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1 Grafen til et skalarfelt av to variable parametriseres av seg selv:

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så flateelementet er $\sqrt{6}$ overalt - grafen er et plan, og et skrått plan er $\sqrt{1+|f'|^2}$ ganger større enn skyggen sin. Arealet er derfor $\sqrt{6}$ ganger arealet av D . Med $y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ og $y_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ (en rotasjon, jf. oppgave 34 i økt 9) er D ellipsen $y_1^2/2 + 2y_2^2 \leq 1$ med halvaksler $\sqrt{2}$ og $1/\sqrt{2}$, altså areal $\pi\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi$, og

$$\iint_{\Sigma} dS = \sqrt{6} \pi.$$

- 2 Holder du x_2 fast og lar x_1 variere, tegner g en kurve på flaten, og $\partial g/\partial x_1$ er tangenten til den kurven. Likeledes er $\partial g/\partial x_2$ tangent til kurvene der x_1 er fast. Begge ligger altså i tangentplanet til flaten, og kryssproduktet står normalt på begge, og dermed på flaten. Delt på sin egen lengde blir det en enhetsnormalvektor, forutsatt at ingen av tangentene er null og at de ikke er parallelle - hvilken vei den peker bestemmes av rekkefølgen i kryssproduktet.

Fluksen gjennom flaten er hvor mye av f som går *gjennom* den, altså normalkomponenten $f \cdot e_n$ integrert over flaten. Flateelementet er $dS = |\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g| dx$, så

$$\iint_{\Sigma} f \cdot e_n dS = \iint_D f(g(x)) \cdot \frac{\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g}{|\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g|} |\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g| dx = \iint_D f(g(x)) \cdot (\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g) dx.$$

Lengdene kansellerer, så vi trenger aldri å normalisere.

Coloumbfeltet er

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3},$$

og kuleskallet parametriseres ved

$$g(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = R \sin \varphi g,$$

der kryssproduktet peker utover (jf. oppgave 10). På skallet er $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{g}{R^3}$, og $g \cdot g = R^2$, så

$$\iint_{\Sigma} E \cdot e_n dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{g}{R^3} \cdot R \sin \varphi g d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Feltet avtar som $1/R^2$ og arealet vokser som R^2 , så fluksen er uavhengig av R - det er Gauss' lov, og det er derfor $1/r^2$ er den eneste kraftloven som passer med bevaring av feltlinjer.

- 3 Del D opp i små rektangler med sider h_1 og h_2 . Hvert rektangel sendes av g til en liten, litt buet bit av flaten, og til første orden er $g(x + h_1 e_1) \approx g(x) + h_1 \partial_{x_1} g$ og tilsvarende for x_2 , så biten er omtrent parallelogrammet utspent av $h_1 \partial_{x_1} g$ og $h_2 \partial_{x_2} g$. Arealet av et parallelogram er lengden av kryssproduktet, så

$$\text{areal av biten} \approx |\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g| h_1 h_2,$$

og summerer vi over alle rektanglene og lar dem bli små, står vi med riemannsummen til $\iint_D |\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g| dx$. Faktoren $|\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g|$ spiller samme rolle som jacobideterminanten i økt 9 - den sier hvor mye g strekker små arealer.

Kula med radius r parametriseres ved $g(\theta, \varphi) = r(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)^T$ på $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$, med

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| = r^2 \sin \varphi,$$

siden kryssproduktet er $-r \sin \varphi g$ og $|g| = r$. Arealet er

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = 2\pi r^2 [-\cos \varphi]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

Faktoren $\sin \varphi$ er breddegradseffekten: rutene i rutenettet er brede ved ekvator og smale ved polene.

- 4 La θ være vinkelen rundt smultringen og φ vinkelen rundt tverrsnittet. Sentrum av tverrsnittet ligger i $r_1(\cos \theta, \sin \theta, 0)^T$, og tverrsnittet er en sirkel med radius r_2 i planet utspent av $(\cos \theta, \sin \theta, 0)^T$ og e_3 , så

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \varphi) \cos \theta \\ (r_1 + r_2 \cos \varphi) \sin \theta \\ r_2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi).$$

Tangentene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = r_2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix},$$

som står vinkelrett på hverandre med lengder $r_1 + r_2 \cos \varphi$ og r_2 , så flateelementet er $r_2(r_1 + r_2 \cos \varphi)$ og

$$\iint_\Sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r_2 (r_1 + r_2 \cos \varphi) d\varphi d\theta = 4\pi^2 r_1 r_2,$$

siden $\cos \varphi$ integrerer til null over en hel runde. Det er omkretsen av tverrsnittet, $2\pi r_2$, ganger veien sentrum av tverrsnittet reiser, $2\pi r_1$ - utsiden av smultringen er strukket akkurat like mye som innsiden er klempt sammen.

- 5 Som i gammel eksamensoppgave 1 er flateelementet til grafen til et plan konstant,

$$|\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g| = |(1, 0, 2)^T \times (0, 1, 1)^T| = |(-2, -1, 1)^T| = \sqrt{6},$$

og Ω er en sirkelskive med areal π , så arealet er $\sqrt{6}\pi$.

- 6 Vi bruker kulekoordinatene $g(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)^T$ med $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$ og $dS = \sin \varphi d\theta d\varphi$. Arealet er en åttendedel av 4π , altså $\pi/2$, og massesenteret er

$$\frac{2}{\pi} \iint_\Sigma x dS = \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \\ \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \cdot \pi/4 \\ 1 \cdot \pi/4 \\ \pi/2 \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Massesenteret ligger på diagonalen, som det må av symmetri, i avstand $\sqrt{3}/2$ fra origo - godt innenfor skallet. Sammenlikn med oppgave 8: det halve skallet har massesenter i høyden $1/2$, og åttendedelen er bare tre kopier av det samme tallet.

Utnormalen til enhetskula er $e_n = x$ selv, så fluksen er

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f \cdot x \, dS &= \iint_{\Sigma} (x_2 x_1 - x_1 x_2 + x_3^2) \, dS = \iint_{\Sigma} x_3^2 \, dS \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

De to første komponentene av f er en rotasjon om x_3 -aksen, som er tangentiell til kula og ikke bidrar. Sjekk: over hele kula er $\iint x_3^2 \, dS = \frac{1}{3} \iint |x|^2 \, dS = \frac{4\pi}{3}$ av symmetri, og en åttendedel av det er $\pi/6$.

- 7 Grafen parametriseres ved $g(x) = (x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2 + 1)^T$ over enhetssirkelskiven, med oppovernormal

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

På flaten er $h = (-x_2, x_1, 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) + 1)^T$, så

$$h \cdot (\partial_{x_1} g \times \partial_{x_2} g) = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 + 2x_1^2 - 2x_2^2 + 3 = 4x_1 x_2 + 2(x_1^2 - x_2^2) + 3,$$

og over enhetssirkelskiven integrerer både $x_1 x_2$ og $x_1^2 - x_2^2$ til null av symmetri, så fluksen er

$$\iint_{\Omega} 3 \, dx = 3\pi.$$

De to første komponentene i h er en rotasjon om x_3 -aksen, og det den skyver inn på den ene siden av sadelen, trekker den ut på den andre; bare den vertikale komponenten $2x_3 + 1$ teller, og den er i gjennomsnitt $2 \cdot 1 + 1 = 3$ over flaten, jf. gammel eksamensoppgave 4 i økt 9.