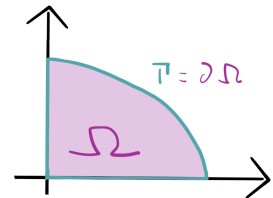


10 - VOLUM

Du bygger videre på din stilige grillhytte med grunnflate Ω og tak formet som den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$. I forrige økt regnet vi ut arealet av den krumme veggen - nå skal vi regne ut volumet av hytten. Volumet under grafen til $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skrives

$$\iint_{\Omega} f$$



og beregnes ikke ulikt volumet av et omdreiningslegeme, så la oss varme opp med å repetere dette.¹ Hvis du dreier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ én gang om x -aksen, får du en slags pølse med variabel tykkelse. Volumet er

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

fordi arealet av pølsens tverrsnitt er gitt ved

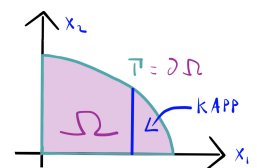
$$A(x) = \pi f^2(x)$$

og hvis du integrerer en funksjon som angir et areal, blir resultatet et volum.

- 1 Drei litt på en bit av sinuskurven, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.
- 2 Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$.
- 3 Regn ut volumet av Gabriels trompet, altså $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 1/x$.

Nøkkelen til å forstå volumet av omdreiningslegemer, er å forstå tverrsnittsfunksjonen A . Du må tenke at du har kappet omdreiningslegemet med motorsag og så gir $A(x)$ arealet av tverrsnittet, og så integrerer du denne for å få volumet. Dobbelintegraler fungerer akkurat på samme måte, men $A(x)$ beregnes litt annerledes. La oss nå finne tverrsnittet av grillhytten.

- 4 Du kapper grillhytten i to med en enorm sag. Du tar en bestemt verdi for x_1 og kapper parallelt med x_2 -aksen. Hva er $A(x_1)$?
- 5 Hva blir volumet?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_of_revolution

La oss beregne noen flere volumer. Dersom Ω er et rektangel blir det det veldig greit; la oss finne volumet under den ideelle gasslov når $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^2 \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \int_0^2 \left(\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 \right) dx_2.$$

Dette kalles et **iterert integral**, for det er et integral inni et annet integral. Det innerste integralet gir tverrsnittet som funksjon av x_2 :

$$A(x_2) = \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1$$

6 Hvilken vei gikk motorsaga nå? Finn volumet.

Det er viktig å forstå at motorsaga kan gå begge veier - du velger selv.²

7 Beregn volumet med motsatt integrasjonsrekkefølge.

Det som kan gjøre dobbeltintegraler litt knotete, er at integrasjonsområdet Ω kan være mer komplisert enn et rektangel. La oss prøve trekanten med hjørner i $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$ og $(0, 2)^T$. Knotet er at du får et funksjonsuttrykk i en integrasjonsgrense i det innerste integralet.

8 Sett opp integralet og beregn volumet. Prøv begge veier.

Her er en oppgave fra konten 2024:

9 La $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3.$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 0)$ og $(3, 4)$. Finn volumet under grafen til f .



²Eller, ikke helt faktisk. Det finnes patologiske tilfeller der du må være forsiktig, men de kommer ikke du til å se noe til. Sjekk ut **Fubinis teorem**

https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem
om du er interessert.

Finn volumet under $f(x) = x_1 x_2$ når Ω er (sett opp begge veier)

- 10 trekanten med hjørner i $(0,0)^T$, $(1,1)^T$ og $(2,0)^T$.
- 11 diamanten med med hjørner i $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(-1,0)^T$ og $(0,-1)^T$.
- 12 området mellom parabelen $x_2 = 1 - x_1^2$ og x_1 -aksen.
- 13 området mellom $x_2 = 1 - x_1^3$ og x_1 -aksen og x_2 -aksen.

Og noen ganger trenger man ikke integrere - volumformlene fra ungdomsskolen gjør jobben. La a være en konstant, og finn

$$14 \iint_{|x|^2 \leq a^2} a - |x| \, dx \quad 15 \iint_{|x|^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - |x|^2} \, dx \quad 16 \iint_{|x|^2 \leq a^2} a \, dx$$

Noen ganger kan det blir vel grisete.

- 17 Finn volumet av grillhytten dersom taket er gitt ved $h(x) = -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8$.

Eller kanskje du må bruke noen gamle triks.

- 18 Vis at

$$\iint_{\Omega} \frac{dx}{1 - x_1 x_2} = \frac{\pi^2}{6}$$

der Ω er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$.

Flere oppgaver her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/interaktiv_6.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/plenumsregning_6.pdf



I denne økten skal vi studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, men vi skal tenke litt annerledes på dem enn i vektorfeltøkten, og motivasjonen er en helt annen. Hvis du fikk til oppgave 17 i forrige økt, skrev du opp at volumet er

$$\iint_{\Omega} f \, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \, dx_2 dx_1.$$

Dette integralet er et svineri å beregne for hånd. Men integralet

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-16r^2 \cos^2 \theta - 12r^2 \cos \theta \sin \theta - 2r^2 \sin^2 \theta + 16r \cos \theta + 18 \sin \theta + 8) 12r dr d\theta$$

gir det samme volumet og er trivielt å beregne så lenge du husker Eulers formel. Nå skal vi se på hvordan vi kommer frem til denne formen. Akkurat som i forrige økt, skal gå helt tilbake til envariabel kalkulus og repetere litt. Arealet av enhets sirkelen er

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

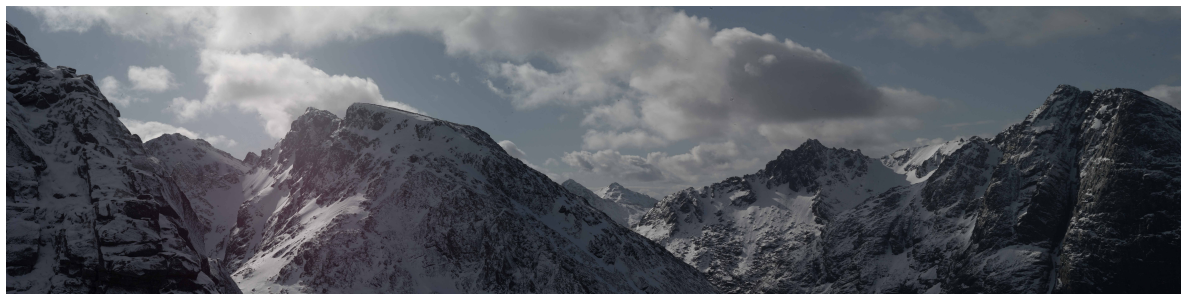
Dette integralet er heller ikke så lett å beregne for hånd med mindre du husker en svær integrasjonstabell, men substitusjonen

$$x = \sin \theta \quad du = \cos \theta \, d\theta$$

gjør susen:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta) \, d\theta = \pi \end{aligned}$$

- 1 Regn ut arealet av en ellipse med halvaksler a og b . En liknende substitusjon gjør vei i vellinga.



Vi kan fikse krøkkete dobbeltintegraler på liknende vis, men da må vi se funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som **koordinatavbildning** istedet for vektorfelt. Finn bildet av enhetskvadratet under lineærabildningen $g(x) = Ax$ når A er

$$\boxed{2-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2-6} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \boxed{2-7} \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & 2 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \boxed{2-8} \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Når vi bytta koordinater i enhetssirkelintegralet på første side, måtte vi gange med $\cos \theta$ som kompensasjon for at $\sin \theta$ reiser fra 0 til 1 på en litt annen måte enn identitetsfunksjonen gjør - identitetsfunksjonen går med jevn fart fra 0 til 1, mens sinusfunksjonen går saktere og saktere mot 1 etterhvert som θ nærmer seg $\pi/2$. Dette kommer vi til å måtte kompensere for i dobbeltintegraler også, og da er det viktig å forstå at avbildninger strekker og krymper ting.

- 3 Finn arealet av alle bildene i oppgavene over.

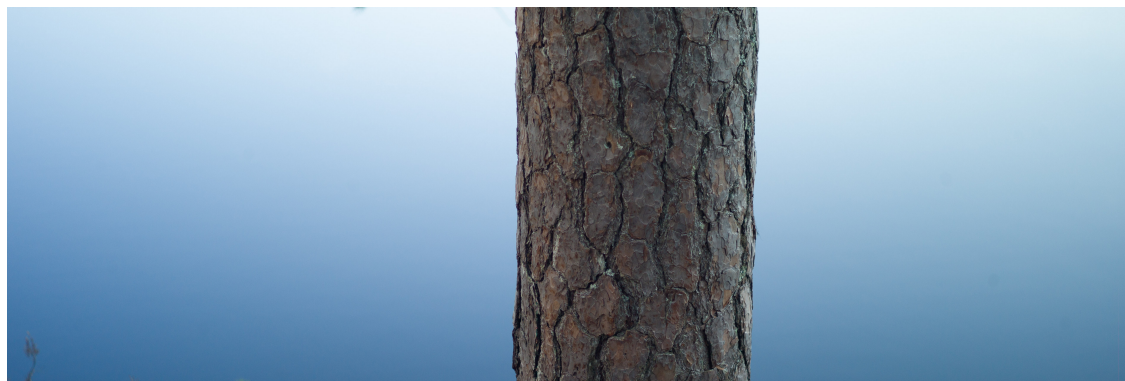
Hvis du skjønnte arealkompensasjonsideen, har du nøkkelen til å forstå dobbeltintegral over tilsynelatende kompliserte definisjonsområder. Hvis du tenker på en todimensjonal riemannsum som en masse små skyskrapere med kvadratisk grunnflate (til høyre ser du et litt patetisk forsøk på å illustrere den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$), kan du tenke at koordinatavbildningen forvrenger grunnflatene, og da må du gange alle de små volumene med arealfaktoren. Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er



- 4 parallelogrammet med hjørner i $(0, 0)^T$, $(2, 1)^T$, $(1, 2)^T$ og $(3, 3)^T$.
- 5 et kvadrat med hjørner i $(0, 0)^T$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)^T$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)^T$ og $(1/2, -\sqrt{3}/2)^T$, altså enhetskvadratet rotert tretti grader.
- 6 de andre bildene i oppgave 2 over, samt diamanten fra oppgave 11 i forrige økt.

I oppgavene over er arealutvidelsesfaktoren konstant siden $g(x) = Ax$ er en lineæroperator. For øvrig heter det ikke egentlig "arealutvidelsesfaktoren", det var bare et ord jeg fant på. Det heter egentlig **jacobideterminanten**³, fordi det er determinanten til jacobimatrisen.

- 7 Finn jacobideterminanten til $g(x) = Ax$ der A er en kvadratisk matrise.



³https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

På forrige side var alt lineæroperatører. Disse hjelper oss til å takle situasjoner der Ω er et parallelogram. For å takle volumet av grillhytten trenger vi noe litt mer komplisert, men trikset er det samme, nemlig å finne en koordinatavbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at Ω er verdimengden til koordinatavbildningen dersom definisjonsmengden er rektangulær. Et av de enkleste eksemplene kjenner du allerede godt, nemlig $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x = g(r, \theta) = \begin{pmatrix} g_1(r, \theta) \\ g_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Koordinatparet (r, θ) kalles **polarkoordinater**, og g kalles **polarkoordinatavbildningen**.⁴ Det er ikke så vanlig å tilordne noen bestemt bokstav til koordinatavbildninger, men jeg har valgt å bruke bokstaven g inntil videre. Det vanligste er å bare skrive $x(r, \theta)$ eller noe sånt.⁵ Dette er kjappere å skrive, men kan lede inn i tvetydighet.

8 Regn ut jacobideterminanten til polarkoordinatavbildningen og finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er den delen av enhetssirkelskiven som ligger i første kvadrant.

9 Et område Ω er begrenset av

$$1 \leq r \leq 2 \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Skisser Ω og og finn volumet under den ideelle gasslov på Ω .

Akkurat som linjeintegraler over skalarfelt kan tolkes som massen til en tråd der skalarfeltet gir massetettheten, kan dobbeltintegraler tolkes som massen til en flat ting Ω dersom f er massetettheten i vekt per areal:

$$m = \iint_{\Omega} f$$

Massesenteret⁶ er gitt ved

$$\frac{1}{m} \iint_{\Omega} x f(x) dx = \frac{1}{m} \left(\frac{\iint_{\Omega} x_1 f(x) dx}{\iint_{\Omega} x_2 f(x) dx} \right).$$

Anta konstant massetetthet, og finn massesentrene til

10 alle områdene på forrige side.

11 et kakestykke.

Det er ellers ikke bare i dobbeltintegraler koordinattransformasjoner er nyttige. Fysikere simpelthen elsker områder med radiell symmetri, for det første fordi slike områder er lette å gjøre beregninger på, antagelig også fordi de er lett å produsere. En overfres eller en drill lager jo sirkulære hull. Det er nok billigere å produsere strømkabler med sirkulære enn elliptiske tverrsnitt.

12 Fysikere elsker også Laplaces likning. Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polarkoordinater, og finn alle løsninger av laplaces likning som ikke avhenger av θ .

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_common_coordinate_transformations

⁶https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html

I uttrykket for standardnormalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

er det en multiplikasjonsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som skyldes at arealet under en sannsynlighetstetthet må være 1. Det sies at Lord Kelvin⁷ under en forelesning spurte ut i salen om det var noen som visste hva en matematiker var for noe. Ingen svarte. Da skrev han opp likningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

pekte på den og sa:

“En matematiker er en som synes dette er like innlysende som det er for deg at $2 \cdot 2 = 4$.”

- 13 Vi vet at $e^{-x^2/2}$ ikke kan antideriveres på noen enkel måte, men nå kan vi få has på integralet over allikevel. Regn ut at

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ved å beregne I^2 med polarkoordinater.

Det finnes mange smarte koordinatavbildninger. Husk at tommelfingerregelen for å finne korrekt koordinatavbildning er at Ω skal være bildet av et gunstig område, helst et rektangel.

- 14 Finn en gunstig koordinatavbildning dersom Ω er ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

og finn volumet av grillhytten.

- 15 Du går en skitur på en øy gitt ved

$$h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$$

der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum.

- 16 Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 2x_1^2, \quad x_1 = x_2^2 \quad \text{og} \quad x_1 = 2x_2^2.$$

- 17 Her er en gammel eksamensoppgave. La $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 4$$

der Ω er ellipseskiven gitt ved

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (x_1 - x_2)^2 \leq 1.$$

Finn volumet under grafen til f .

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Lord_Kelvin