10 - FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE III - LF

1 Vi har $\partial_{x_k} f = \beta_k$, så

$$f'(x) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta^T \qquad \text{og} \qquad \nabla f = \beta.$$

Strengt tatt er dette et spesialtilfelle av neste oppgave, med $A = \beta^T$, men en morsom fun fact kan vel ikke fremsies for ofte.

2 Komponent nummer k er $f_k(x) = \sum_l a_{kl} x_l$, så $\partial_{x_l} f_k = a_{kl}$ og

$$f'(x) = A.$$

Dette er det første av mange pene eksempler på at regneregler du kjenner fra envariable funksjoner generaliserer pent til flervariable dersom du setter inn matrisemultiplikasjon overalt der det er vanlig multiplikasjon i regelen du kan fra før.

3 Med $s = x_1 + x_2$ er

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 2s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad g'(z) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen til f er 3×2 og jacobimatrisen til g er 2×3: like mange rader som komponenter og like mange kolonner som variable.

4 Siden $g_1(z) + g_2(z) = z_3$, er

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2z_3 & 2z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

og med $s = x_1 + x_2$ er

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 2s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2s & -2s \\ 1+2s & 1+2s \end{pmatrix}.$$

Du kan dobbeltsjekke ved å sette sammen funksjonene først: $f(g(z)) = (-z_1 - z_2, z_3^2, z_1 + z_2 + z_3)^T$ og $g(f(x)) = (-x_1 - (x_1 + x_2)^2, x_1 + (x_1 + x_2)^2 + x_2)^T$. Den første er en 3×3-matrise og den andre en 2×2-matrise.

5 Denne oppgaven ser tilforlatelig ut, men peker frem på en veldig viktig ting, spesielt for de som skal lære elektromagnetisme. Vi partiellderiverer og får

$$\partial_{x_1} u(x) = \partial_{x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

og tilsvarende for x_2 og x_3, slik at

$$\nabla u(x) = -\frac{x}{|x|^3}.$$

Dette er en vektor som alltid peker rett inn mot origo, mot lyset, og lengden er $1/|x|^2$. Nivåflatene er kuleskall sentrert i origo med radius $1/C$, siden likningen

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = C$$

kan skrives om til

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{C}.$$

6 Heliksen er $x(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$. Vi er interessert i funksjonen

$$g(t) = u(x(t)) = \frac{1}{|x(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Denne er det bare å derivere med hensyn på t, og få

$$g'(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}},$$

eller bruke kjerneregelen og forrige oppgave og få

$$g'(t) = u'(x(t))\,\dot{x}(t) = -\frac{(\cos t, \sin t, t)}{(1+t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}},$$

som selvfølgelig blir det samme. Fluen kjøler seg ned mens den flyr oppover.

7 Vi deriverer $\partial_{x_k} u = -x_k/|x|^3$ en gang til. De rene dobbelderiverte er

$$\partial_{x_k}^2 u = -\frac{1}{|x|^3} + 3\frac{x_k^2}{|x|^5}$$

(de blandede er $\partial_{x_k}\partial_{x_l} u = 3x_k x_l/|x|^5$, men dem trenger vi ikke), og legger vi sammen de tre rene, får vi

$$\Delta u = -\frac{3}{|x|^3} + 3\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{|x|^5} = 0$$

utenfor origo - u er harmonisk der. På matriseform er hessematrisen

$$u'' = \frac{3xx^T - |x|^2 I}{|x|^5},$$

og Δu er sporet: $3|x|^2 - 3|x|^2 = 0$. Tallet 3 er dimensjonen - i planet er det $\ln|x|$ som er harmonisk, ikke $1/|x|$. Det er derfor $1/|x|$ dukker opp som potensialet rundt en punktladning: coulombpotensialet $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} u$ er harmonisk overalt unntatt der ladningen sitter, og det elektriske feltet $E = -\nabla V$ er dermed kildefritt utenfor origo. Vi kommer tilbake til det senere i økten.

8 Fra oppgave 5 er $\nabla u = -x/|x|^3$, så

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla u = -\nabla V, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|}.$$

Coulombfeltet er minus gradienten til u, opp til konstanten $q/4\pi\epsilon_0$, og V er coulombpotensialet - spenningen fra punktladningen. Alt vi fant ut om u oversettes direkte: nivåflatene til u er kuleskall om ladningen, så det er ekvipotensialflatene også, og E står vinkelrett på dem og peker fra høyt til lavt potensial, rett ut fra ladningen; $|\nabla u| = 1/|x|^2$ er invers-kvadrat-loven; og $\Delta u = 0$ fra oppgave 7 sier at V er harmonisk utenfor origo, som er Gauss' lov $\nabla \cdot E = 0$ i tomt rom - mer om det i økt 13. Fysikeren snakker om feltet E og potensialet V, matematikeren ser ∇u og u. Minustegnet er konvensjon: feltet skal peke nedover i potensialet, slik varmen strømmer fra det varme stearinlyset og utover.

9 Vi later som om ∇ er en vanlig vektor og regner ut prikk- og kryssproduktet med f, med den regelen at en partiellderivert virker på det som står til høyre for den:

$$\nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2 + \partial_{x_3} f_3$$

og

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix}.$$

Det første er et skalarfelt og det andre et vektorfelt, og begge er satt sammen av de ni partiellderiverte i jacobimatrisen: divergensen er summen langs diagonalen, altså sporet, mens rotasjonen er de seks utenfor diagonalen parvis trukket fra hverandre - det som overlever når du trekker den transponerte fra ∇f. Er jacobimatrisen symmetrisk, er rotasjonen null. Rekkefølgen er ikke likegyldig, for ∇ deriverer alt som står til høyre for seg: $f \cdot \nabla$ er ikke et tall, men en ny operator $f_1\partial_{x_1} + f_2\partial_{x_2} + f_3\partial_{x_3}$ som venter på noe å derivere.

10 Her er $f(x) = x$, så jacobimatrisen er identitetsmatrisen:

$$\nabla f = I \qquad \nabla \cdot f = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad \nabla \times f = 0.$$

Divergensen er sporet til jacobimatrisen, og sporet til I er 3. Feltet peker rett ut fra origo overalt, så det er ren ekspansjon og ingen rotasjon - tenk en gass som utvider seg jevnt i alle retninger. At divergensen ble akkurat 3 er ingen tilfeldighet: det er dimensjonen. I planet ville det samme feltet hatt divergens 2.

11 Nå er

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \cdot f = 0 \qquad \nabla \times f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Divergensen er null fordi diagonalen i jacobimatrisen er null: hver komponent av f avhenger bare av *andre* variable enn sin egen. Rotasjonen regner vi ut rett fra formelen, for eksempel

$$\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 = \partial_{x_2} x_1 - \partial_{x_3} x_3 = 0 - 1 = -1,$$

og de to andre komponentene går likedan.

12 Dette er den andre sykliske ombyttingen, og alt snur fortegn:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \cdot f = 0 \qquad \nabla \times f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen i denne og forrige oppgave er transponerte av hverandre, og siden divergensen bare ser diagonalen mens rotasjonen bare ser den antisymmetriske delen, får de samme divergens og motsatt rotasjon. Legg merke til at rotasjonen peker langs $(1,1,1)^T$. Det er ikke tilfeldig: begge disse matrisene er ortogonale med determinant 1, altså rotasjoner på 120 grader, og de roterer nettopp om diagonalen $(1,1,1)^T$, som er den eneste retningen en syklisk ombytting lar være i fred.

13

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \cdot f = 1 \qquad \nabla \times f = 0.$$

Her er jacobimatrisen *symmetrisk*, og da må rotasjonen bli null, for rotasjonen plukker ut nettopp den antisymmetriske delen. Symmetrisk jacobimatrise er også et varsku om at feltet er en gradient, og ganske riktig er

$$f = \nabla \left(x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{2} \right).$$

Sammenlikn med oppgave 17: gradientfelt roterer aldri.

14

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \cdot f = 0 \qquad \nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Divergensen er null - vann er inkompressibelt, det hoper seg ikke opp noe sted. Men rotasjonen er *ikke* null, og dette er verdt å stoppe litt ved, for det er her de fleste går i baret første gang. Strømlinjene er jo helt rette: alt vann beveger seg pent i x_1-retningen og svinger ingen steder. Likevel roterer feltet. Grunnen er at vannet lenger oppe går fortere enn vannet lenger nede, så slipper du et lite skovlhjul ned i strømmen, får det mer futt på oversiden enn på undersiden og begynner å spinne. Rotasjon handler om lokal skjærspinn i væsken, ikke om hvorvidt strømlinjene krøller seg.[1]

15 Skriv $k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ og $r = |x|$, slik at $f(x) = k\frac{x}{r^3}$. Siden $\partial_{x_i} r = \frac{x_i}{r}$, er

$$\partial_{x_i} \frac{x_j}{r^3} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5},$$

altså

$$\nabla f = k \left(\frac{1}{r^3} I - \frac{3}{r^5} x x^T \right).$$

Denne er symmetrisk, så $\nabla \times f = 0$ med en gang, og det måtte den være, for

$$f = -k \nabla \frac{1}{r}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Vorticity

er en gradient. Divergensen er sporet, og siden $\operatorname{tr} I = 3$ og $\operatorname{tr} xx^T = |x|^2 = r^2$, blir

$$\nabla \cdot f = k\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right) = 0 \qquad \text{for } x \neq 0.$$

Dette er hele poenget med coulombfeltet: det har ingen kilder noe sted *unntatt* i origo, der ladningen sitter, og der er feltet ikke definert i det hele tatt. Regner man litt mer forsiktig, i distribusjonsforstand, finner man at $\nabla \cdot f$ er en diracpuls i origo med vekt q/ϵ_0, og det er nettopp Gauss' lov.[2]

16

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \partial_{x_3}^2 f = \Delta f,$$

altså laplaceoperatoren, som du kjenner fra før. Divergensen av gradienten: først finner du hvilken vei det bærer nedover, så spør du om det pilene peker på sprer seg eller samler seg. Er $\Delta f > 0$ i et punkt, ligger f lavere der enn i nabolaget rundt.

17 Denne blir null:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}\partial_{x_3} f - \partial_{x_3}\partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3}\partial_{x_1} f - \partial_{x_1}\partial_{x_3} f \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2} f - \partial_{x_2}\partial_{x_1} f \end{pmatrix} = 0,$$

for blandede annenderiverte er like uansett rekkefølge så lenge f er to ganger kontinuerlig deriverbar.[3] Fysisk sier dette at et gradientfelt aldri virvler. Et kraftfelt som er en gradient kalles **konservativt**, og det er nettopp derfor du ikke kan bygge en evighetsmaskin av tyngdekraften: du kommer aldri rundt en løkke med netto arbeid.

18 Her skjer det ikke noe magisk - dette er bare et vektorfelt:

$$\nabla (\nabla \cdot g) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\left(\partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \partial_{x_3} g_3\right) \\ \partial_{x_2}\left(\partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \partial_{x_3} g_3\right) \\ \partial_{x_3}\left(\partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \partial_{x_3} g_3\right) \end{pmatrix}.$$

Legg merke til at dette *ikke* er Δg: her deriverer vi g_2 og g_3 med hensyn på x_1 i førstekomponenten, mens Δg bare deriverer g_1 der. De to henger likevel sammen, og forbindelsen kommer i oppgave 20. Tolkningen er grei nok: $\nabla \cdot g$ måler hvor det er kilder, og gradienten av det peker mot der kildene blir sterkere.

19 Vi tar rotasjonen først,

$$\nabla \times g = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2 \\ \partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3 \\ \partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 \end{pmatrix},$$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's_law

[3] Dette er Schwarz' (eller Clairauts) teorem, og det er ikke gratis: for funksjoner som ikke er pene nok spiller rekkefølgen faktisk en rolle.
https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_of_second_derivatives

og så divergensen av den:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times g) =& \partial_{x_1}\left(\partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2\right) + \partial_{x_2}\left(\partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3\right) + \partial_{x_3}\left(\partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1\right) \\ =& \left(\partial_{x_1}\partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_2}\partial_{x_1} g_3\right) + \left(\partial_{x_2}\partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_3}\partial_{x_2} g_1\right) + \left(\partial_{x_3}\partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_1}\partial_{x_3} g_2\right) \\ =& 0.\end{aligned}$$

I det andre steget sorterte jeg de seks leddene etter hvilken komponent av g de deriverer, og da står de parvis som blandede annenderiverte i motsatt rekkefølge. Slike er like, jf. oppgave 17, så alt kansellerer.

Dette er tvillingen til oppgave 17. Begge sier egentlig det samme: nabla "kryssa med seg selv" gir null, akkurat som $a \times a = 0$ for en vanlig vektor, og det er bare symmetrien i de blandede deriverte som får det til å gå opp.

Fysisk sier $\nabla \cdot (\nabla \times g) = 0$ at et rotasjonsfelt hverken har kilder eller sluk - feltlinjene lukker seg om seg selv. Det er hele grunnen til at magnetfeltet tilfredsstiller $\nabla \cdot B = 0$: man kan skrive $B = \nabla \times A$ for et vektorpotensial A, og da følger det gratis at det ikke finnes magnetiske monopoler.[4] Det omvendte holder også på snille områder: er $\nabla \cdot F = 0$, så *finnes* det en A med $F = \nabla \times A$.

20 Denne er den eneste av de fem som ikke kollapser til noe kjent, men den lar seg skrive om. Vi tar førstekomponenten. Med $c = \nabla \times g$ er

$$\begin{aligned}\left(\nabla \times c\right)_1 =& \partial_{x_2} c_3 - \partial_{x_3} c_2 \\ =& \partial_{x_2}\left(\partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1\right) - \partial_{x_3}\left(\partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3\right) \\ =& \partial_{x_1}\partial_{x_2} g_2 + \partial_{x_1}\partial_{x_3} g_3 - \partial_{x_2}^2 g_1 - \partial_{x_3}^2 g_1.\end{aligned}$$

Nå legger vi til og trekker fra $\partial_{x_1}^2 g_1$, som er det eneste leddet som mangler for å få to pene grupper:

$$\begin{aligned}\left(\nabla \times c\right)_1 =& \partial_{x_1}\left(\partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \partial_{x_3} g_3\right) - \left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2\right) g_1 \\ =& \left(\nabla\left(\nabla \cdot g\right)\right)_1 - \left(\Delta g\right)_1.\end{aligned}$$

De to andre komponentene går helt likedan, så

$$\nabla \times (\nabla \times g) = \nabla\left(\nabla \cdot g\right) - \Delta g.$$

Dette er antakelig den mest brukte vektoridentiteten i all fysikk. Tar du rotasjonen av Faradays lov og setter inn Ampères lov, er det nøyaktig denne som gjør Maxwells likninger om til bølgelikningen og forteller deg at lys finnes.[5] Merk også at den kan brukes baklengs som en *definisjon* av Δg for vektorfelt i andre koordinatsystemer enn det kartesiske, der "komponentvis laplace" ikke er så uskyldig som det ser ut.

22 Tiden er bare en parameter for nablaoperatoren, så

$$\dot{f} = x_3 \qquad \text{og} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ t \end{pmatrix}.$$

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_vector_potential

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_wave_equation

23 I tomt rom er $\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0$. Ta rotasjonen av Faradays lov og bytt rekkefølge på tids- og romderivasjon:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla \times \dot{B} = -\partial_t (\nabla \times B) = -\frac{1}{c^2}\ddot{E},$$

der vi satte inn Ampères lov til slutt. Venstresiden er $\nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E = -\Delta E$ etter oppgave 20, så

$$\ddot{E} = c^2 \Delta E.$$

For B tar vi rotasjonen av Ampères lov og setter inn Faradays:

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times B) = \partial_t (\nabla \times E) = -\ddot{B}, \qquad c^2 \nabla \times (\nabla \times B) = -c^2 \Delta B,$$

altså $\ddot{B} = c^2 \Delta B$. Hver komponent av begge feltene tilfredsstiller bølgelikningen med farten c - og c var i utgangspunktet bare konstanten i Ampères lov, målt med spoler og kondensatorer. At den stemte med lyshastigheten var Maxwells store øyeblikk.

24 Siden $\nabla e^{i(k\cdot x - \omega t)} = ik\, e^{i(k\cdot x - \omega t)}$ og $\partial_t e^{i(k\cdot x - \omega t)} = -i\omega\, e^{i(k\cdot x - \omega t)}$, virker nablaoperatoren som ik og tidsderivasjonen som $-i\omega$ på slike bølger. De to divergenslikningene gir da

$$ik \cdot E_0 = 0 \qquad \text{og} \qquad ik \cdot B_0 = 0,$$

så både E_0 og B_0 står vinkelrett på bølgeretningen k. Faradays lov gir

$$ik \times E_0 = i\omega B_0, \qquad \text{altså} \qquad B_0 = \frac{1}{\omega}\, k \times E_0,$$

og et kryssprodukt står vinkelrett på begge faktorene, så $B_0 \perp E_0$. Dermed er E_0, B_0 og k innbyrdes ortogonale. Ampères lov gir tilsvarende $c^2 k \times B_0 = -\omega E_0$, og setter du inn uttrykket for B_0 og bruker BAC-CAB, står det $c^2|k|^2 = \omega^2$: bølgen reiser med farten $\omega/|k| = c$, og $|B_0| = |E_0|/c$. Kryssproduktet $E \times B$ peker langs k og kalles **poyntingvektoren**[6] - den sier hvor energien i bølgen er på vei.

25 Vi deriverer den første likningen og får

$$\partial_t \nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \rho$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \partial_t E + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

26 De to divergenslikningene, Gauss' lov og Gauss' lov for magnetisme. Ta divergensen av Faradays lov:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times E) = -\partial_t \nabla \cdot B,$$

så $\nabla \cdot B$ er konstant i tid - er den null i starten, forblir den null. Ta divergensen av Ampères lov:

$$0 = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times B) = \partial_t \nabla \cdot E + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J,$$

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_vector`

og siden ladning er bevart, $\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$ står det

$$\partial_t \left(\nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0.$$

Gjelder Gauss' lov i ett øyeblikk, gjelder den altså for alltid. De to rotasjonslikningene styrer hvordan feltene utvikler seg i tid, og divergenslikningene er bare krav til starttilstanden - de blir med på lasset gratis. Det er derfor Maxwells likninger, som ser ut som åtte likninger for seks ukjente, ikke er overbestemt likevel.

27 Tre meter ganger ti newton blir tretti newtonmeter eller joule som vi sier. Massen til tingen er uvesentlig.

28 Så da blir det tre meter ganger ti newton ganger cosinus til førtifem som er en på roten av to.

29 Lett! Arbeidet den magnetiske kraften gjør på partikkelen langs banen Γ fra $x(a)$ til $x(b)$ er

$$\int_\Gamma q\,(v \times B) \cdot ds = q \int_a^b (v \times B) \cdot v \, dt = 0,$$

siden et kryssprodukt står vinkelrett på begge faktorene sine. Sagt med effekt: kraften leverer $F \cdot v$ per tidsenhet, og

$$F \cdot v = q\,(E + v \times B) \cdot v = qE \cdot v + q\,(v \times B) \cdot v = qE \cdot v.$$

Den magnetiske kraften står alltid normalt på farten, så den kan bøye banen, men aldri endre farten eller den kinetiske energien - det er derfor ladde partikler går i sirkler i et magnetfelt, og derfor alt arbeidet i en elektromotor til syvende og sist gjøres av det elektriske feltet.

30 Arbeidet som F gjør på partikkelen er

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F \cdot ds &= \int_a^b \left(-F_1(r\cos\theta(t), r\sin\theta(t))\sin\theta(t) + F_2(r\cos\theta(t), r\sin\theta(t))\cos\theta(t)\right) r\dot{\theta}(t)\, dt \\
&= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} re_s \times (F_1 e_1 + F_2 e_2) \cdot e_3 \, d\theta \\
&= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} x \times F \cdot e_3 \, d\theta.
\end{aligned}$$

Innmaten i dette integralet er dreiemomentet til F om origo, så huskeregelen er at dreiemomentet er den størrelsen du integrerer med hensyn på θ for å finne arbeid på noe som dreier om en rotasjonsakse.

31 Vi har

$$x(t) = e_1 r\cos\theta(t) + e_2 r\sin\theta(t)$$

og

$$v(t) = -e_1 r\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + e_2 r\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$$

så dreieimpulsen blir

$$L = x \times p = mr^2\dot{\theta}e_3.$$

32 La oss for enkelhets skyld anta at m er konstant. Vi deriverer L og bruker $F = \dot{p}$ og at kryssproduktet mellom parallelle vektorer er null, og får

$$\dot{L} = \dot{x} \times p + x \times \dot{p} = x \times F.$$

Hvis det ikke er dreiemoment er dreieimpulsen konservert siden $\dot{L} = 0$. Å beregne dreieimpulsen for en ting med utstrekning er et trippelintegral, men hvis du ser på partikkelen i oppgaven over, så ser du at om r minker må noe annet øke og det eneste som kan øke er $\dot{\theta}$. Så om du tenker på en kunstløper som en partikkel i posisjonen til kunstløperens massesenter, vil rotasjonshastigheten øke om massesenteret trekkes inn mot rotasjonsaksen.

33 Denne er litt morsom. Dersom skiven er sentrert i origo og har rotasjonshastigheten ω gitt i radianer per sekund, er hastighetsvektoren i punktet med koordinater $(s, \theta, 0)$ gitt ved

$$\begin{aligned} v &= s\omega e_\theta \\ &= s\omega(-e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta) \\ &= \omega(-e_1 x_2 + e_2 x_1) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Divergensen til denne er null, men rotasjonen er $2e_3\omega$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for størrelsen $\frac{1}{2}\nabla \times f$, men på engelsk kalles denne "rotation", mens det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl".

34 La oss først skrive opp

$$\begin{aligned} \partial v - \nabla v &= \begin{pmatrix} \partial_x v_1 \\ \partial_x v_2 \\ \partial_x v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla_x v_1 & \nabla_x v_2 & \nabla_x v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_3} v_1 \\ \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_1} v_3 & \partial_{x_2} v_3 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_2} v_3 \\ \partial_{x_3} v_1 & \partial_{x_3} v_2 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_2} v_1 - \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1 & 0 & \partial_{x_3} v_2 - \partial_{x_2} v_3 \\ \partial_{x_1} v_3 - \partial_{x_3} v_1 & \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sammenlikner vi nå med

$$\theta S(y) = \theta \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ser vi at om vi setter

$$y = \frac{\nabla \times v}{|\nabla \times v|}$$

blir

$$\frac{1}{2}(\partial v - \nabla v)$$

generatoren til en rotasjon som går vinkelen

$$\theta = \frac{1}{2}|\nabla \times v|$$

rundt y. Dette er altså grunnen til at vi sier $\nabla \times v$ er den "infinitesimale rotasjonen" til vektorfeltet.