

1 - LAPLACETRANSFORM - LF

- 1 Det kjappeste er nok å gange med e^{2t} på begge sider, omskrive cosinusfunksjonen med Eulers formel

$$\dot{x}(t)e^{2t} + 2x(t)e^{2t} = e^{2t} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \left(\frac{e^{(2+i)t} + e^{(2-i)t}}{2} \right)$$

og så integrere

$$x(t)e^{2t} = c + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} e^{(2+i)t} + \frac{1}{2-i} e^{(2-i)t} \right)$$

og så gange opp med e^{-2t} :

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-2t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} e^{it} + \frac{1}{2-i} e^{-it} \right) \\ &= ce^{-2t} + \frac{1}{5} \left(\frac{2-i}{2} e^{it} + \frac{2+i}{2} e^{-it} \right) \\ &= ce^{-2t} + \frac{1}{5} (2 \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

Bruker vi initialkravet $x(0) = 0$, får vi $0 = c + \frac{2}{5}$ slik at

$$x(t) = \frac{1}{5} (2 \cos t + \sin t - 2e^{-2t}).$$

- 2 Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)$$

som forteller oss at den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$

Den partikulære løsningen er helt klart

$$x_p(t) = 1,$$

slik at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right) + 1.$$

Initialkravet $x(0) = 0$ gir

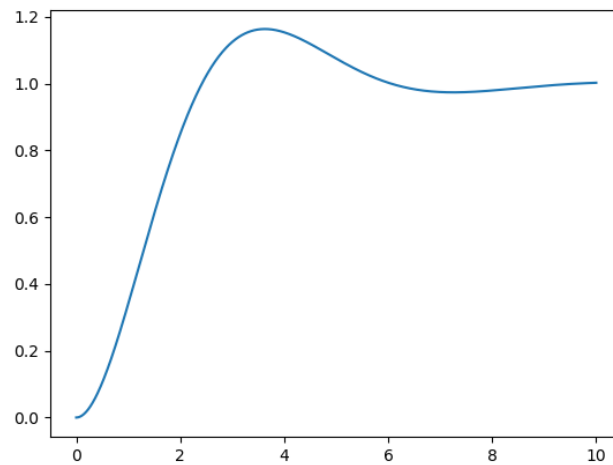
$$c_1 + 1 = 0$$

slik at $c_1 = -1$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir

$$\frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

slik at $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Løsningen er altså

$$x(t) = 1 - e^{-t/2} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$



3 Å gausseliminere et slik system, lærte du i høst. Vi beregner

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & \sim & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hvis vi velger $x_3 = s$ og $x_4 = t$, blir

$$x_2 = 2 - 2s - 3t$$

og

$$x_1 = \frac{2 - 3(2 - 2s - 3t) - 4s - 5t}{2} = -2 + s + 2t,$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + s + 2t \\ 2 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Merk nå at strukturen på dette problemet ligner strukturen på det forrige. Vektorene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er løsninger av det homogene systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}$$

mens vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kun passer i det inhomogene systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{array}$$

Dette går igjen hver gang du har en system som er en lineæroperator L og en vektor y og så leter du etter x slik at $Lx = y$.

- 4 Det er slitsomt å skrive $\sqrt{3}/2$ veldig mange ganger, så la oss definere

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

slik at røttene til det karakteristiske polynomet kan skrives

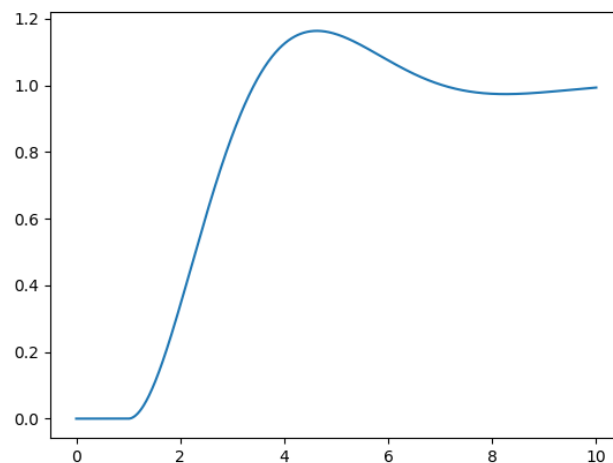
$$\lambda = \alpha \pm i\omega_0$$

og løsningen

$$x(t) = 1 - e^{\alpha t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0 t) \right).$$

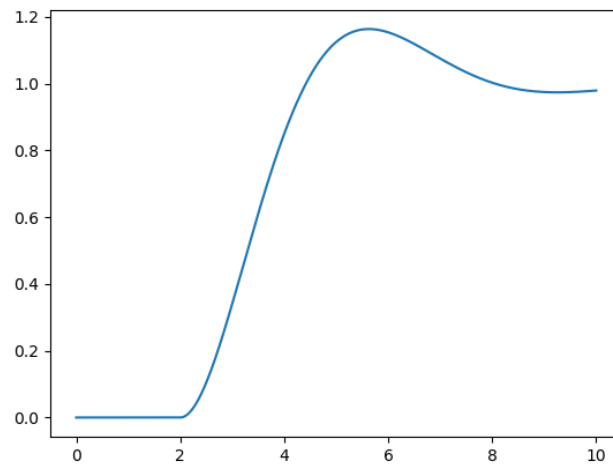
Poenget med lti-trikset er at om vi skruer på den drivende kraften $f(t) = 1$ ved tiden $t = 1$ istedet for $t = 0$, vil systemet oppføre seg akkurat likt. Vi kan derfor ta løsningen av det forrige problemet og skru den på ved tiden $t = 1$ istedet:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1)$$



- 5 Samme her:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2)$$



- 6 Her gjelder det å skjønne at superposisjonsprinsippet må brukes for det det er verdt. Hvis vi definerer

$$x_1(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1)$$

og

$$x_2(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2)$$

og definerer lineæroperatoren

$$L(x) = \ddot{x} + \dot{x} + x,$$

har vi

$$L(x_1(t)) = u(t-1)$$

og

$$L(x_2(t)) = u(t-2)$$

slik at

$$L(x_1(t) - x_2(t)) = L(x_1(t)) - L(x_2(t)) = u(t-1) - u(t-2).$$

Med andre ord er løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ &= \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1) \\ &\quad - \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2). \end{aligned}$$

- 7 Denne skal jeg regne ut med laplacetransform litt lenger ned, og så skal vi se på løsningen og så skal vi skjønne alt.

- 8 Siden eksponensialfunksjonen er egenfunksjon til derivasjonsoperatoren, er den også egenvektor til lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorene:

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{at} + \frac{d}{dt} e^{at} + e^{at} = (a^2 + a + 1) e^{at}$$

Av denne grunn er det vel smart å gjette på

$$x_p(t) = Ce^{i\omega t}$$

som partikulærløsning. Vi setter denne inn på venstresiden og får

$$C \frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} + C \frac{d}{dt} e^{i\omega t} + C e^{i\omega t} = ((i\omega)^2 + i\omega + 1) e^{i\omega t}$$

Denne skal jo helst bli lik $e^{i\omega t}$, og det blir den dersom

$$C = \frac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

- 9 Her er det bare å skrive $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ og bruke forrige oppgave og superposisjonsprinsippet:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1} + \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\omega + 1} \right) \end{aligned}$$

Skal du ha initialkrav må du selvfølgelig ha med den homogene løsningen, men jeg droppa initialkrav i denne oppgaven for det blir så mye regning.

- 10 Vi skriver

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

slik at

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2} \cdot \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Den homogene løsningen er

$$x_h(t) = A \cos t + B \sin t.$$

Når $\omega = 1$ er den påtrykte kraften en homogen løsning, og uttrykket over er ikke definert. Man kan gå i Arnes bok og oppdage at partikulærløsningen i dette tilfellet er

$$x_p(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

som øker i amplitude etterhvert som tiden går. (Sjekk gjerne: $\ddot{x}_p = \cos t - \frac{t}{2} \sin t$, slik at $\ddot{x}_p + x_p = \cos t$ som det skal. Faktoren $\frac{1}{2}$ er lett å miste; gjetter du bare $t \sin t$ får du $2 \cos t$ på høyresiden.) Om man påtrykker en ekstern kraft som allerede er en homogen løsning, skjer det samme som når du løper frem og tilbake på fergedekket; gjør du det med riktig frekvens, får din lille masse hele fergen til å vugge frem og tilbake.

- 11 La $x(t) = e^{at}$. Så lenge realdelen til s er større enn a , får vi

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}.$$

12 La $\sigma > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}) &= \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st} dt \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0).\end{aligned}$$

13 Vi bruker linearitet og regneregelen over på venstre side, og får

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x} + ax) &= \mathcal{L}(\dot{x}) + a\mathcal{L}(x) \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0) + a\mathcal{L}(x) \\ &= (s + a)\mathcal{L}(x) - 1\end{aligned}$$

mens høyre side blir

$$\mathcal{L}(0) = 0$$

slik at

$$(s + a)\mathcal{L}(x) - 1 = 0$$

eller

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s + a}.$$

Sammenlikner vi med oppgave 11 og tror på rettferdighet i verden, kan vi nå slutte at

$$x(t) = e^{-at},$$

som er akkurat den løsningen vi visste på forhånd.

14 Lett:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\ddot{x}) &= s\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) \\ &= s(s\mathcal{L}(x) - x(0)) - \dot{x}(0) \\ &= s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

Høyere ordens regneregler er null stress, bare fortsett i samme duren.

15 La $x(t) = \cos t$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{it} + e^{-it}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

- 16 La $x(t) = \sin t$, slik at $\dot{x}(t) = \cos t$ og $x(0) = 0$. Derivasjonsregelen

$$s\mathcal{L}(x) - x_0 = \mathcal{L}(\dot{x})$$

gir

$$s\mathcal{L}(x) = \frac{s}{s^2 + 1},$$

slik at

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

- 17 Fra nå av skriver jeg $X(s)$ og ikke $\mathcal{L}(x)$. Det er litt lettere å lese. Vi laplacetransformerer begge sider av likningen, bruker lineariteten, derivasjonsreglene og initialkravene, og får

$$s^2 X(s) - s + X(s) = 0$$

slik at

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

som gir at

$$x(t) = \cos t.$$

- 18 Ditto. Vi transformerer

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = 0$$

og løser

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

slik at

$$x(t) = \sin t.$$

- 19 Ditto. Vi får

$$s^2 X(s) - s + sX(s) - 1 + X(s) = 0,$$

som gir

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}.$$

Merk hvordan nevneren i høyresiden er det karakteristiske polynomet til likningen. La den ene roten være $\lambda = \alpha + i\omega_0$ slik at den andre blir $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega_0$. Vi delbrøksoppspalter slik:

$$\frac{s+1}{s^2 + s + 1} = \frac{A}{s - \lambda} + \frac{B}{s - \bar{\lambda}}$$

og ganger opp med $s^2 + s + 1$, slik at

$$s+1 = A(s - \bar{\lambda}) + B(s - \lambda)$$

Sammenlikning av ordener i s på høyre og venstre side gir

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A\bar{\lambda} - B\lambda &= 1 \end{aligned}$$

som løses av

$$A = \frac{1+\lambda}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{1+\lambda}{2i\omega_0} \quad B = \frac{1+\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda} = -\frac{1+\bar{\lambda}}{2i\omega_0}$$

slik at

$$\frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{2i\omega_0} \left(\frac{1+\lambda}{s-\lambda} - \frac{1+\bar{\lambda}}{s-\bar{\lambda}} \right)$$

Nå gjelder det å holde tungen beint i munnen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2i\omega_0} \left((1+\lambda) e^{\lambda t} - (1+\bar{\lambda}) e^{\bar{\lambda} t} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0} \left((1+\lambda) e^{i\omega_0 t} - (1+\bar{\lambda}) e^{-i\omega_0 t} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0} \left((1+\lambda) e^{i\omega_0 t} - \overline{(1+\lambda) e^{i\omega_0 t}} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \operatorname{im} (1+\lambda) e^{i\omega_0 t} \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \operatorname{im} ((1+\alpha + i\omega_0) (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t))) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} (\omega_0 \cos(\omega_0 t) + (1+\alpha) \sin(\omega_0 t)) \\ &= e^{\alpha t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1+\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

Hvis vi sammenlikner denne strategien med å lete opp den homogene løsningen

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

fra det karakteristiske polynomet og så bruke initialkravene for å finne $A = 1$ og $B = (1 + \alpha)/\omega_0$, må vi vel konkludere med at laplacetransform i dette tilfellet var fullstendig underlegent gamlemåten dersom målet var å finne $x(t)$. Men merk at veien frem til

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

var veldig kort. Poenget med laplacetransformen er ikke egentlig å finne x , men derimot å finne X og så melke denne for informasjon. En trent ingeniør gidder sjelden finne x . Poenget med disse oppgavene er bare at du skal skjønne at at en bestemt X leder til en bestemt x .

20 Vi får

$$s^2 X(s) + sX(s) + X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

slik at

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)(s^2+1)}.$$

Denne kommer til å bli enda verre enn den forrige; vi må delbrøksoppspalte noe ut av det hinsidige. Det er mye enklere å finne homogen og partikulær. Den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t),$$

mens den partikulære kan vi relativt enkelt finne ved å skrive

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

slik at

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i)e^{it} + H(-i)e^{-it}) \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i}e^{it} + \frac{1}{-i}e^{-it} \right) \\&= \sin t\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\&= e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + \sin t\end{aligned}$$

Kravet $x(0) = 0$ gir nå $A = 0$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir $\omega_0 B + 1 = 0$, slik at

$$x(t) = \sin t - \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

- 21 Denne likner mistenkelig på forrige oppgave, bare med $\sin t$ istedenfor $\cos t$ på høyre side. Vi skriver $\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$ og bruker igjen H fra oppgave 8:

$$x_p(t) = \frac{1}{2i} (H(i)e^{it} - H(-i)e^{-it}).$$

Vi må regne ut

$$H(i) = \frac{1}{i^2 + i + 1} = \frac{1}{i} = -i \quad H(-i) = \frac{1}{(-i)^2 - i + 1} = \frac{1}{-i} = i,$$

slik at

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \frac{1}{2i} (-ie^{it} - ie^{-it}) \\&= \frac{-i}{2i} (e^{it} + e^{-it}) \\&= -\cos t.\end{aligned}$$

(Sjekk gjerne at $\ddot{x}_p + \dot{x}_p + x_p = \cos t + \sin t - \cos t = \sin t$ stemmer - det er lurt å alltid dobbeltsjekke slike ting.) Med den homogene løsningen fra oppgave 19 og 20 blir

$$x(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) - \cos t.$$

Kravet $x(0) = 0$ gir $A - 1 = 0$, altså $A = 1$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir $\alpha A + \omega_0 B = 0$, slik at $B = -\alpha A / \omega_0 = 1 / (2\omega_0) = 1 / \sqrt{3}$. Løsningen er altså

$$x(t) = e^{-t/2} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) - \cos t.$$

- 22 Denne likner på den forrige, vi kjører samme strategi:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\&= e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + H(i\omega)e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Konstantene A og B kan du regne ut om du orker.

- 23 Denne er litt artig, men vi trenger å smake på et laplacetriks, nemlig **konvolusjonsregelen**. Dersom $Z = XY$, er

$$z(t) = \int_0^t x(u)y(t-u) du.$$

Vi får nemlig

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \sin(u) \sin(t-u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2u-t) - \cos t) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2u-t) \Big|_0^t - t \cos t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\sin t + \sin t) - t \cos t \right) \\ &= \frac{\sin t - t \cos t}{2} \end{aligned}$$

Her brukte jeg produkt-til-sum-formelen $\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B))$ i det andre steget. Merk at både $\sin t$ og $\cos t$ er homogene løsninger, så det er $t \cos t$ -leddet som er interessant her: det er dette som vokser uten grense og gir resonansen. (Dobbeltsjekk gjerne at $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ og at $\ddot{x} + x = \sin t$ - det tar ti sekunder og redder deg fra mye tull.) Konvolusjon er viktig, men fremstår som snodig i begynnelsen. Vi kommer tilbake til det.

- 24 Denne er også litt artig. Vi får

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Siden

$$-\frac{d}{ds} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

gir neste oppgave oss at

$$x(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

Dette er den homogene og den partikulære løsningen, men det er ikke innlysende at man skal gjette på partikulærløsningen te^{-t} når det drivende leddet er en homogen løsning. Så her var laplacetransform helt klart til hjelp.

- 25 Vi ganger likningen

$$y(t) = tx(t)$$

med e^{-st} og får

$$y(t)e^{-st} = tx(t)e^{-st} = -\frac{d}{ds} x(t)e^{-st}$$

og integrerer fra 0 til ∞ , slik at

$$Y(s) = \int_0^\infty tx(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} X(s).$$

Den viktigste konsekvensen av denne regelen er at

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(te^{-at}) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{(s+a)^2},$$

altså at en **dobbel rot** i nevneren svarer til et t ganget på løsningen. Dette er nøkkelen til systemet i andre del av oppgaven.

Så til systemet. Den andre likningen

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \quad x_2(0) = 1$$

inneholder ikke x_1 i det hele tatt, så den kan vi løse for seg selv; laplacetransform gir $sX_2 - 1 = -X_2$, altså

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{og} \quad x_2(t) = e^{-t}.$$

Dette kaller vi et **triangulært** system - likningene kan løses etter tur istedet for samtidig. Nå setter vi dette inn i den første likningen:

$$\dot{x}_1(t) + x_1(t) = x_2(t) \quad x_1(0) = 1,$$

og laplacetransformerer den også:

$$sX_1 - 1 + X_1 = X_2 = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad X_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Og der dukket den doble roten opp. Med regelen vi nettopp beviste blir

$$x_1(t) = e^{-t} + te^{-t} = (1+t)e^{-t}.$$

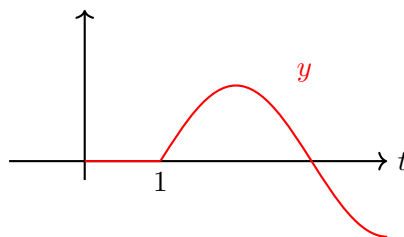
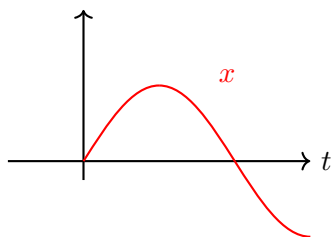
Legg merke til at dette er nøyaktig samme svar som i oppgave 24, og det er ingen tilfeldighet: der var e^{-t} et påtrykk vi fikk servert, her lager systemet det selv gjennom x_2 . Fysisk er dette to bølger der den ene renner ned i den andre: x_2 tømmer seg eksponentielt, og det som renner ut av x_2 renner inn i x_1 , som samtidig lekker ut på egen hånd. Merk at $\dot{x}_1(0) = -x_1(0) + x_2(0) = 0$; i det første øyeblikket er tilsiget fra x_2 akkurat like stort som lekkasjen ut av x_1 , så x_1 starter *flatt* og begynner først deretter å synke. Det er nettopp dette t -et i $(1+t)e^{-t}$ gjør - det holder igjen løsningen en liten stund sammenliknet med den rene e^{-t} -en i x_2 .

27 Vi beregner

$$\int_0^\infty u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

og

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty u(t-a)x(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^\infty x(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty x(t)e^{-s(t+a)} dt \\ &= e^{-as} \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = e^{-as} X(s) \end{aligned}$$



På oppgave 4-6 får vi henholdsvis

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)} = e^{-s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right)$$

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + s + 1)} = e^{-2s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + s + 1)} \\ &= e^{-s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) - e^{-2s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) \\ &= (e^{-s} - e^{-2s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) \end{aligned}$$

som gir t -skiftede superposisjoner av $x_p(t) = 1$ og løsningen fra oppgave 19. I oppgave 7 får vi

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1} + \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)}$$

som vi også ser er en superposisjon av løsningene på oppgave 4 og 19. Superposisjonsprinsippet er jammen greit å vite om.

28 Lett!

$$Y(s) = \int_0^\infty x(t) e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty x(t) e^{-(s-a)t} dt = X(s-a)$$

29 Regelen over gir umiddelbart at transformene blir

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos \omega t) = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{og} \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin \omega t) = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

Jeg vet ikke om det er helt riktig å si at oppgave 19 blir enklere, men vi kan ihvertfall gjøre den på en komplisert med litt annerledes måte. Vi skriver

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

og ser nå lett at

$$x(t) = e^{-t/2} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

Med litt trening, kan det tenkes at dette går kjappere enn å bare skrive opp den homogene løsningen og så bruke initialkravene. Du kan jo ta tiden på deg selv og se. Send meg en epost om du finner ut noe interessant.

30 Vi får

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(x-s) ds = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_x^{x+k} f(s) ds = f(x).$$

31 Dersom pulsen går på i $t = a$ er $X(s) = e^{-as}$.

32 Vi regner i vei, og får

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

slik at

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}.$$

33 og ditto:

$$x(t) = u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

34 og superposisjonsprinsippet:

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)} - u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

35 Hvis du vil løse med laplace, blir transformen

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{e^{-s}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) e^{-s} \end{aligned}$$

som gir

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(e^{-(t-1)/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (t-1) \right) \right) u(t-1),$$

altså løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$$

men flyttet et knepp til høyre på t -aksen. Det finnes en annen måte å gjøre det på, se oppgave 36 og 37.

36-37 Her kommer et eksempel på et tilfelle der laplacetransform gjør analysen fryktelig mye enklere. Begge problemene i oppgaven har laplacetransform

$$X(s) = \frac{m(v_0 + sx_0) + bx_0 + 1}{ms^2 + bs + k}$$

der det siste ett-tallet kommer fra deltapulsen i det ene tilfellet, og fra tillegget $1/m$ i initialfarten i det andre. Dette betyr at vi kan tolke deltapulsen som noe som momentant tilfører bevegelsesmengden 1 til bevegelsen. (Husk at bevegelsesmengde er mv .)

- 38 Regnereglene for motstand, spole og kondensator er

$$v(t) = Ri(t) \quad i(t) = C\dot{v}(t) \quad v(t) = L\dot{i}(t).$$

Motstanden er triviell, laplacetransform er en lineæroperator, så

$$V(s) = RI(s).$$

For kondensatoren bruker vi derivasjonsregelen fra oppgave 12 på likningen $i(t) = C\dot{v}(t)$ og antar $v(0) = 0$ (ingen ladning i kondensatoren fra start):

$$I(s) = C(sV(s) - v(0)) = sCV(s) \implies V(s) = \frac{I(s)}{sC}.$$

For spolen gjør vi det samme med $v(t) = L\dot{i}(t)$ og antar $i(0) = 0$ (ingen strøm gjennom spolen fra start):

$$V(s) = L(sI(s) - i(0)) = sLI(s).$$

Legg merke til at disse ser ut akkurat som Ohms lov, bare med "motstandene" R , $1/(sC)$ og sL . Dette kalles **impedans**, og er hele grunnen til at det er så digg å laplacetransformere kretser - du kan resirkulere alt du kan om kretser med rene motstander, bare i s -domenet istedet for tidsdomenet.

- 39 La $y(t) = \int_0^t x(u) du$. Da er $\dot{y}(t) = x(t)$ og $y(0) = 0$. Vi laplacetransformerer og bruker derivasjonsregelen fra oppgave 12:

$$X(s) = \mathcal{L}(\dot{y}) = sY(s) - y(0) = sY(s),$$

slik at

$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s).$$

Legg merke til symmetrien med regelen fra oppgave 12: derivasjon i tidsdomenet blir multiplikasjon med s i s -domenet (pluss litt fikling med initialkrav), mens integrasjon i tidsdomenet blir divisjon med s (og du slipper fiklinga, for integrasjonskonstanten er alltid implisitt null når du integrerer fra 0).

- 40 Kirchhoffs spenningslov sier at spenningsfallet over motstanden, spolen og kondensatoren til sammen er lik pådraget $f(t)$:

$$\underbrace{Ri(t)}_{\text{motstand}} + \underbrace{Li'(t)}_{\text{spole}} + \underbrace{\frac{1}{C} \int_0^t i(v) dv}_{\text{kondensator}} = f(t),$$

der det siste leddet er spenningen over kondensatoren skrevet ved hjelp av strømmen, jf. oppgave 38. Vi laplacetransformerer med reglene fra oppgave 38 og 39, og antar $i(0) = 0$:

$$RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = F(s),$$

slik at

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} F(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} F(s).$$

Systemfunksjonen, altså forholdet mellom utgang (strømmen) og inngang (spenningskilden), er derfor

$$H(s) = \frac{I(s)}{F(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

- 41 Setter du spenningen over kondensatoren som ukjent istedenfor strømmen (se avsnittet mellom oppgave 40 og 41), er systemfunksjonen

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

Med $L = 0.063$, $R = 3000$ og $1/C = 200000$ blir dette

$$H(s) = \frac{1}{0.063s^2 + 3000s + 200000}.$$

Polene finner du ved å løse det karakteristiske polynomet; deler vi på 0.063 og bruker *abc*-formelen (eller kunnskapene dine om at $R^2 \gg 4L/C$) finner du to reelle, godt separerte røtter

$$\lambda_1 \approx -66.8 \quad \lambda_2 \approx -47552.$$

Kretsen er altså sterkt overdempet - det er ingen oscillasjon å spore, bare en rask og en langsom eksponentiell avtagning, der den langsomme dominerer responsen ($x(t)$ vil på lang sikt oppføre seg omtrent som $e^{\lambda_1 t}$).

- 42 Samme oppskrift, bare med $R = 2000$:

$$H(s) = \frac{1}{0.063s^2 + 2000s + 200000}.$$

Polene blir nå

$$\lambda_1 \approx -100.3 \quad \lambda_2 \approx -31646,$$

fortsatt reelle og godt separerte, altså fortsatt overdempet. Legg merke til at mindre motstand R flytter begge polene nærmere hverandre (og nærmere den imaginære aksen) - skru R enda mer ned, og til slutt blir polene komplekse og du får resonansoppførsel, akkurat som resten av dette heftet handler om.

- 43 La $v_1 = \dot{x}_1$ og $v_2 = \dot{x}_2$. Da er $m\dot{v}_1 + av_1 = 0$ med $v_1(0) = 1$, og laplacetransform gir

$$(ms + a)V_1(s) = m \quad \Rightarrow \quad V_1(s) = \frac{1}{s + a/m} \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = e^{-(a/m)t}.$$

Bruker vi integrasjonsregelen fra oppgave 39 på $x_1(t) = \int_0^t v_1(u) du$, altså $X_1(s) = V_1(s)/s$, og delbrøksoppspalter, finner vi

$$x_1(t) = \frac{m}{a} (1 - e^{-(a/m)t}).$$

For v_2 har vi isteden $m\dot{v}_2 + av_2 = -mg$ med $v_2(0) = 1$, slik at

$$(ms + a)V_2(s) = m - \frac{mg}{s} \quad \Rightarrow \quad V_2(s) = \frac{1}{s + a/m} - \frac{g}{s(s + a/m)},$$

som gir (igjen delbrøksoppspalting)

$$v_2(t) = \left(1 + \frac{mg}{a}\right) e^{-(a/m)t} - \frac{mg}{a}.$$

Integrasjonsregelen på nytt gir

$$x_2(t) = \frac{m}{a} \left(1 + \frac{mg}{a}\right) (1 - e^{-(a/m)t}) - \frac{mg}{a}t.$$

Ballen suser altså mot en horisontal asymptote $x_1 \rightarrow m/a$ mens den etterhvert faller rett ned med konstant hastighet $-mg/a$ (luftmotstanden balanserer tyngden - dette kalles **terminalhastighet**), akkurat som du forventer fysisk. Plotter du $(x_1(t), x_2(t))$ ser du en bane som starter med stigningstall 1 (samme som startfarten) og flater mer og mer ut mot en vertikal linje $x_1 = m/a$ når $t \rightarrow \infty$ - helt annerledes enn den symmetriske parabellen du er vant til fra skråkast uten luftmotstand.

For systemet med diracpuls er alt akkurat likt, bortsett fra at $\delta(t)$ i bevegelsesmengden (jf. oppgave 36-37) tilsvarer å øke startfarten med $1/m$ i begge retninger. Løsningen er derfor akkurat den samme som over, men med $v_1(0) = v_2(0) = 1 + 1/m$ istedet for 1:

$$x_1(t) = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{m}{a} (1 - e^{-(a/m)t}) = \frac{m+1}{a} (1 - e^{-(a/m)t})$$

$$x_2(t) = \frac{m}{a} \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{mg}{a}\right) (1 - e^{-(a/m)t}) - \frac{mg}{a}t.$$

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER

- 1** (Sorry for den litt tacky litterære stilen i dette lf - det var i 2023 og alt skulle prøves.)
Her er Jens Glad Balchens berømte oppskrift på laplacegryte med diracstuing.

Ingredienser:

- 1: $\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$
- 2: $\mathcal{L}(\ddot{x}) = s\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$
- 3: $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$
- 4: $\mathcal{L}(\delta(t-1)) = e^{-s}$
- 5: $\mathcal{L}(u(t-a)x(t-a)) = e^{-as}X(s)$
- 6: $\mathcal{L}(e^{at}x(t)) = X(s-a)$

Oppskrift:

- 1: Vi omvender hele greia, bruker **1**, **2** og **4**, og får

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4s + 4}.$$

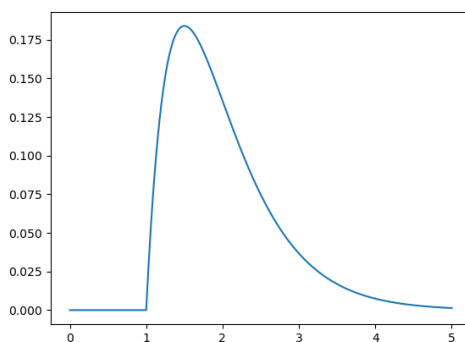
- 2: Nå kombinerer vi **3** og **6** og observerer at

$$\mathcal{L}(te^{-2t}) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

3: Til slutt bruker vi **5** og ser at

$$\mathcal{L}(u(t-1)(t-1)e^{-2(t-1)}) = \frac{e^{-s}}{(s+2)^2}$$

4: slik at $x(t) = u(t-1)(t-1)e^{-2(t-1)}$.



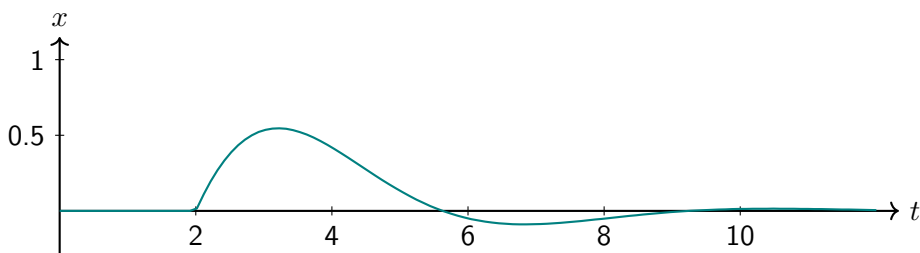
2 Laplacetransform gir

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right) e^{-2s},$$

og s -skift og t -skift gir

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(t-2)/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\right) u(t-2).$$

Dette er impulsresponsen fra oppgave 35 flyttet ett knepp til høyre: ingenting skjer før slaget kommer ved $t = 2$, og så svinger systemet ut med dempete svingninger med vinkelfrekvens $\sqrt{3}/2$ og innhylningskurve $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-(t-2)/2}$.



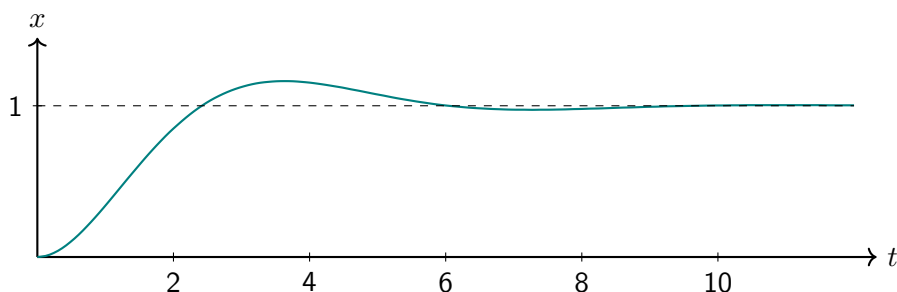
3 Dette er sprangresponsen fra oppgave 4, bare skrudd på ved $t = 0$. Laplacetransform gir

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

og s -skift gir

$$x(t) = 1 - e^{-t/2} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right).$$

Løsningen starter i ro i origo, svinger over likevekten $x = 1$ et par ganger og roer seg ned der. Løser du med karakteristisk polynom, er $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ når $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, den partikulære løsningen er $x_p = 1$, og initialkravene gir $c_1 = -1$ og $c_2 = -1/\sqrt{3}$.



4 Laplacetransform gir

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2},$$

så

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} = 1 - (1+t)e^{-t}.$$

Det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ har dobbel rot, så systemet er kritisk dempet og kryper opp mot 1 uten å svinge.

5 Laplacetransform gir $(s+2)X(s) = \frac{s}{s^2+1}$, altså

$$X(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5} \left(-\frac{2}{s+2} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \right),$$

slik at

$$x(t) = \frac{1}{5} (2 \cos t + \sin t - 2e^{-2t}).$$

Det siste leddet er den naturlige responsen som dør ut, og de to første er frekvensresponsen: systemfunksjonen er $H(s) = 1/(s+2)$, så den stasjonære løsningen er

$$\operatorname{Re}(H(i)e^{it}) = \operatorname{Re}\left(\frac{2-i}{5}e^{it}\right) = \frac{1}{5}(2 \cos t + \sin t),$$

med amplitude $|H(i)| = 1/\sqrt{5}$ og faseforskyvning $\arctan(1/2)$ bak påtrykket.