TEMATIME - 44 - H26

NEWTONS AVKJØLINGSLOV

Dette er oppgave 6 fra eksamen i SIF5003 Matematikk 1, 8. desember 1999, den gangen det var lov å lage artige eksamensoppgaver:[1]

> Når strømmen går klokken 00.00 den 1. januar år 2000, sitter Kjell Magne på sitt kontor som da holder temperaturen $19.0°$C. Fra dette tidspunkt avtar temperaturen på kontoret i samsvar med Newtons avkjølingslov: Temperaturendringen pr. tidsenhet er proporsjonal med differansen mellom inne- og utetemperatur. Utetemperaturen denne rekordkalde natten er $-36.9°$C. Klokken 01.00 er temperaturen på kontoret falt til $10.8°$C.
>
> På Kjell Magnes bord står et glass med vann. Hva er klokken når vannet i glasset begynner å fryse?

La $T(t)$ være temperaturen på kontoret t timer etter at strømmen gikk, la T_0 være temperaturen ved $t = 0$, og la T_U være utetemperaturen. Newtons avkjølingslov er en litt grov, men ganske nyttig modell som sier at temperaturendringen $T'(t)$ er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom ute og inne:

$$T'(t) = \alpha\,(T_U - T(t)) \qquad T(0) = T_0$$

Proporsjonalitetskonstanten $\alpha > 0$ inneholder all informasjon om hvor fort varmen lekker ut gjennom veggene, og varmekapasiteten til kontoret og så videre. Vi organiserer likningen slik

$$T'(t) + \alpha T(t) = \alpha T_U$$

og ganger med $e^{\alpha t}$ på begge sider av likhetstegnet:

$$e^{\alpha t}T'(t) + \alpha e^{\alpha t}T(t) = \alpha T_U e^{\alpha t}.$$

Venstresiden er nå nøyaktig det vi får når vi deriverer $e^{\alpha t}T(t)$ med produktregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}T(t)\right) = \alpha T_U e^{\alpha t}.$$

Nå integrerer vi begge sider og får

$$e^{\alpha t}T(t) = T_U e^{\alpha t} + c$$

der c er en vilkårlig konstant. Ganger vi med $e^{-\alpha t}$ på begge sider, står $T(t)$ alene:

$$T(t) = T_U + ce^{-\alpha t}.$$

Initialkravet $T(0) = T_0$ gir $T_0 = T_U + c$, altså $c = T_0 - T_U$, og vi sitter igjen med

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U)\,e^{-\alpha t}.$$

Når t går mot uendelig, går $T(t)$ mot T_U, så kontoret ender til slutt opp like kaldt som ute. Løsningsteknikken kalles integrerende faktor, men det er et litt misvisende navn, for penn-og-papir-løsningsteknikker for differensiallikninger består stort sett i å gange likningen med et eller annet og

[1] https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/sif5003_1999-12-08.pdf

integrere. Dette prinsippet er enkelt å forstå, men tar en del trening å trene opp et øye for hva man skal gange med for å klare å integrere. Med $T_0 = 19.0$ og $T_U = -36.9$ er

$$T(t) = -36.9 + 55.9e^{-\alpha t},$$

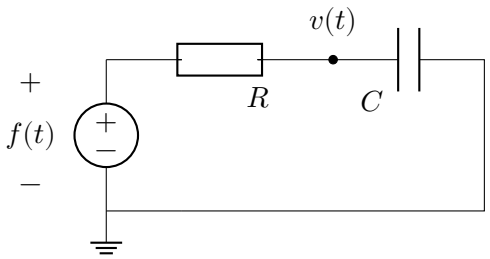
og siden $T(1) = 10.8$, er $55.9e^{-\alpha} = 47.7$, altså $\alpha = \ln(55.9/47.7) \approx 0.159$ per time. Vannet begynner å fryse når $T(t) = 0$, altså når $55.9e^{-\alpha t} = 36.9$, som gir

$$t = \frac{\ln(55.9/36.9)}{\ln(55.9/47.7)} \approx 2.62.$$

Klokken er da omtrent 02.37.

LAVPASSFILTERET

Nå tar vi en helt annen modell som leder til nøyaktig samme differensiallikning. En motstand og en kondensator som kobles i serie med en spenningskilde, kalles et lavpassfilter om spenningen $v(t)$ måles i punktet markert $v(t)$:



Kirchhoffs spenningslov og elementlovene for motstand og kondensator gir

$$RCv'(t) + v(t) = f(t) \qquad v(0) = v_0.$$

La oss først sette $f = 0$ og løse det enkleste problemet

$$RCv'(t) + v(t) = 0 \qquad v(0) = v_0.$$

Vi setter $x(t) = RCv(t)$ og får

$$x(t) = ce^{-t/RC}.$$

Initialkravet $v(0) = v_0$ gir $x(0) = RCv_0$, slik at

$$x(t) = RCv_0e^{-t/RC} \qquad \text{eller} \qquad v(t) = v_0e^{-t/RC}.$$

Når t går mot uendelig, går $v(t)$ mot null, så med kilden skrudd av lades kondensatoren ut gjennom motstanden.

RADIOAKTIV NEDBRYTNING

Radiokarbondatering modelleres av akkurat den samme likningen som lavpassfilteret med kilden skrudd av.[2] Dersom t måles i år og $x(t)$ er C-14-konsentrasjonen, tilfredsstiller x likningen

$$x'(t) = -\frac{\ln 2}{5700}x(t)$$

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_dating`

der $\lambda = \ln(2)/5700$ kalles **desintegrasjonskonstanten** eller **nedbrytningskonstanten**. La oss finne ut omtrent når et dyr avgikk med døden dersom liket inneholder en tiendedel av min C-14-konsentrasjon. (Jeg lever ennå.) Vi vet at løsningen er

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} = x_0 2^{-t/5700}.$$

Nå er det irrelevant hva x_0 er, så lenge vi finner det tidspunktet der $x(t)$ er nede i en tiendedel av x_0, som gir likningen

$$\frac{1}{10} = 2^{-t/5700}$$

som gir

$$\text{DYRETS DØD} = t = 5700\frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

Dyret døde altså for om lag 19000 år siden. Dette er omtrentlig, for C-14-konsentrasjonen var ikke den samme da som nå, og forskere krangler ennå om hva det nøyaktige C-14-innholdet i atmosfæren har vært de siste 50000 årene. C-14 dannes når nøytroner fra kosmisk stråling kræsjer med N-14-isotoper høyt oppe i troposfæren, men et par atombombesprengninger (som produserer mye C-14) og massevis av CO_2 fra fossilt brennstoff (som produserer mye C-12) har gjort alt litt komplisert.

Tritium[3] har halveringstid på 12 år og 3 måneder. Dersom t måles i år, skal mengden tritium halveres hver gang det har gått 12.25 år, så desintegrasjonskonstanten λ til tritium må tilfredsstille

$$\frac{1}{2} = e^{-12.25\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/12.25 \approx 0.057$.

ATMOSFÆRETRYKK

La oss finne ut hvordan trykket varierer med høyden i en høy og tynn sylinder dersom den er fylt av en ideell gass.[4] Jeg skal bruke den ideelle gasslov[5]

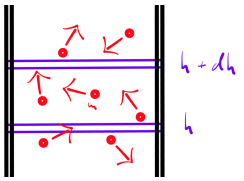
$$pV = NTk.$$

Hvis vi antar at trykkforskjellen mellom h og $h + dh$ kun skyldes vekten av gassen mellom disse to høydene, kan vi skrive (trykket er høyere ved h enn ved $h + dh$)

$$p(h) - p(h + dh) = \frac{mgN}{V}dh$$

der N er antall gassmolekyler mellom h og $h + dh$, m er massen til hvert molekyl, og g er tyngdeakselerasjonen. Jeg har også brukt at arealet av tverrsnittet kan skrives V/dh, der V er volumet mellom h og $h + dh$. La oss nå bruke den ideelle gasslov, og dele på dh:

$$\frac{p(h + dh) - p(h)}{dh} = -\frac{mgp}{Tk}$$



Dersom vi lar $dh \to 0$ og antar at T er konstant, får vi differensiallikningen

$$p'(h) = -\frac{mg}{Tk}p(h).$$

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_hydrogen
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law
[5] Jeg skriver NTk istedet for NkT. Det er lettere å huske siden det rimer på "NTH"

Anta at dette er en modell for trykket i atmosfæren, der h er høyden over havet. Likningen er den samme som for radioaktiv nedbrytning, med mg/Tk i rollen til λ og h i rollen til t, så trykket som funksjon av høyden over havet er

$$p(h) = p_0 e^{-mgh/Tk}$$

der p_0 er trykket ved havoverflaten. Denne modellen er ikke så god, ser her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_40.html`

E. COLI

Prokaryoter og mange typer sopp (for eksempel ølgjær) deler seg ved såkalt avsnøring; dette betyr at de kloner seg selv fra tid til annen.[6] *E. Coli* deler seg for eksempel omtrent hvert tjuende minutt ved vår kroppstemperatur 310 K. La $x(t)$ være antall bakterier ved tiden t. Dersom bakteriene alltid deler seg i to etter det samme tidsintervallet, er endringen $x'(t)$ proporsjonal med antall bakterier $x(t)$:

$$x'(t) = \lambda x(t) \qquad x(0) = x_0$$

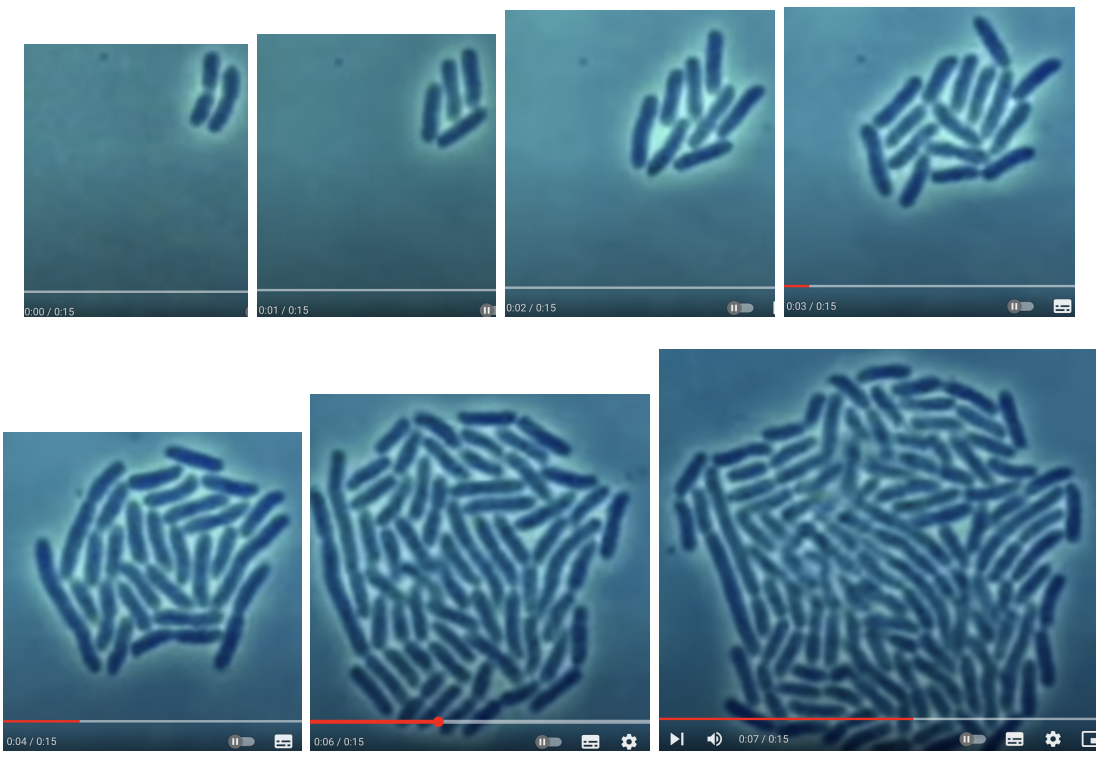
I biologi kalles λ **vekstraten**. Dersom t måles i 20-minutters inkrementer blir $\lambda = \ln 2$, slik at

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(\ln 2)t} = x_0 2^t.$$

Dersom t måles i sekunder,[7] skal antall bakterier dobles hver gang det har gått 1200 sekunder. Vi kan egentlig gjøre det enkelt og si at det skal dobles fra $t = 0$ til $t = 1200$:

$$2 = e^{1200\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/1200$. Her er skjermdumper av `https://www.youtube.com/watch?v=gEwzDydciWc`



[6] `https://snl.no/celledeling`

[7] SI-enheter har en viss forrang over andre enheter; en gang krasjet visst en ubemannet marssonde fordi en gjeng med amerikanere hadde skrevet noe software der det var brukt fot og pund i stedet for meter og kilogram.

TIDSKONSTANTEN

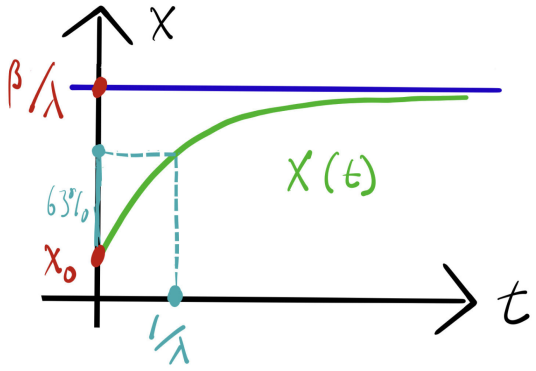
Ett og samme initialverdiproblem

$$x'(t) + \lambda x(t) = \beta \qquad x(0) = x_0$$

med løsning

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda}$$

er en modell for så mange forskjellige ting at det er galskap å bli ingeniør uten å lære seg det. Til høyre er et generisk plot.



Vi kaller $1/\lambda$ **tidskonstanten** til differensiallikningen.[8] Siden $1/e \approx 0.36787944117$, ser vi at ved $t = 1/\lambda$, har x nådd om lag 63 prosent av veien fra x_0 til β/λ. Dette initialverdiproblemet er forresten et eksempel på et **lineært tidsinvariant system**[9] og hvis du sier til en gammel ingeniør at du har et LTI-system med tidskonstant sånn og sånn, vil figuren over umiddelbart dukke opp på vedkommendes hjernebark. Kontoret til Kjell Magne har tidskonstant $1/\alpha \approx 6.3$ timer, og lavpassfilteret har tidskonstant RC. For radioaktiv nedbrytning er tidskonstanten $1/\lambda$, altså halveringstiden delt på $\ln 2$: omtrent 8200 år for C-14 og 17.7 år for tritium. I trykkmodellen er det høyden som spiller rollen til tiden, så der er tidskonstanten en høyde, nemlig Tk/mg, som er omtrent 8 kilometer for luft.

LAVPASSFILTER MED SPENNINGSKILDE

Lavpassfilteret med spenningskilde er

$$x'(t) + \frac{1}{RC} x(t) = f(t)$$

og integrerende faktor gir

$$e^{t/RC} x(t) - x(0) = \int_0^t f(s) e^{s/RC}\, ds.$$

Bruker vi $x(0) = RCv_0$ og løser for $x(t)$, får vi

$$x(t) = RCv_0 e^{-t/RC} + e^{-t/RC} \int_0^t f(s) e^{s/RC}\, ds$$

$$= RCv_0 e^{-t/RC} + \int_0^t f(s) e^{-(t-s)/RC}\, ds.$$

Integralet kalles en **folding** eller **konvolusjon** og deler vi på RC, får vi spenningen over kondensatoren:

$$v(t) = v_0 e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} \int_0^t f(s) e^{-(t-s)/RC}\, ds.$$

Et relevant regneeksempel for linjer som må gjennom kretsteori, er $f(t) = \cos(t)$, og der $v_0 = 0$. Da gir formelen over

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t \cos(s) e^{-(t-s)/RC}\, ds = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t \cos(s) e^{s/RC}\, ds.$$

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Time_constant
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_system

Integralet regner vi ut med delvis integrasjon to ganger, der vi begge ganger deriverer $e^{s/RC}$:

$$\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds = \sin(t)e^{t/RC} - \frac{1}{RC}\int_0^t \sin(s)e^{s/RC}\,ds$$

$$= \sin(t)e^{t/RC} + \frac{1}{RC}\cos(t)e^{t/RC} - \frac{1}{RC} - \frac{1}{(RC)^2}\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds.$$

Nå er vi tilbake til integralet vi startet med, så vi kan løse likningen for det:

$$\int_0^t \cos(s)e^{s/RC}\,ds = \frac{RC\left(\cos(t) + RC\sin(t)\right)e^{t/RC} - RC}{1+(RC)^2}.$$

Ganger vi med $e^{-t/RC}$ og deler på RC, får vi

$$v(t) = \frac{\cos(t) + RC\sin(t) - e^{-t/RC}}{1+(RC)^2}.$$

Leddet med $e^{-t/RC}$ dør ut, og igjen står en svingning med samme frekvens som kilden. Dette integralet blir enklere å regne med Eulers formel, så det er lurt å vende tilbake det.

LAVPASSFILTER MED POTMETER

Det er vanlig å utvide denne teknikken også til å inkludere initialverdiproblemer på formen

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) \qquad x(0) = x_0$$

som oppstår dersom du for eksempel bytter ut motstanden med et potmeter som du skrur på mens strømmen går, eller kondensatorplater som endrer avstand over tid eller noe annet slikt. Løsningsteknikken er den samme, men den integrerende faktoren er mer komplisert:

$$\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$$

Prosedyren gir

$$x(t) = x_0\exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right) + \exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right)\int_0^t f(u)\exp\left(\int_0^u a(s)\,ds\right)\,du$$

$$= x_0\exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right) + \int_0^t f(u)\exp\left(-\int_u^t a(s)\,ds\right)\,du.$$

men det er antagelig enklere for studentene om vi presenterer teknikken gjennom eksempler. Jeg kommer bare på ett eksempel jeg har hatt bruk for i grunnutdanninga - den som dukker opp når man regner ut fourieromvendingen til standardnormalfordelingen:

$$x'(t) + tx(t) = 0$$

Her er $f = 0$ og $a(t) = t$. Da er

$$\int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2},$$

så den integrerende faktoren er $e^{t^2/2}$, og formelen over gir

$$x(t) = x_0e^{-t^2/2}$$

der $x_0 = x(0)$.

PENDELEN

En pendel som henger fra taket og dingler uten friksjon eller luftmotstand, tilfredsstiller ifølge Newtons andre lov

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0,$$

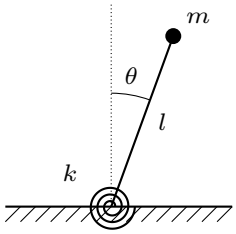
der θ er vinkelutslaget med loddlinjen, l er pendelens lengde og g er tyngdeakselerasjonen. Her er $ml^2\theta'(t)$ der m er massen til pendelen en fornuftig integrerende faktor, siden vi kan integrere og få

$$\frac{1}{2}m\left(l\theta'(t)\right)^2 - mgl\cos\theta(t) = c$$

der c er en konstant. Venstresiden er summen av kinetisk og potensiell energi så her har vi likningen for konservert energi. (Jeg lurte fælt på dette på dette når jeg gikk på gymnaset.)

SKIPET

Vi fester en loddrett og masseløs stang med lengde l til gulvet med en torsjonsfjær med stivhet k, og setter en punktmasse m på toppen. Fjæren leverer et moment $k\theta$ som er proporsjonalt med utslagsvinkelen θ fra loddlinjen og drar stangen tilbake, mens tyngdekraften gir momentet $mgl\sin\theta$, som drar den lenger ut.



Newtons andre lov gir

$$ml^2\theta''(t) = mgl\sin\theta(t) - k\theta(t).$$

Ganger vi med $\theta'(t)$ og integrerer, får vi

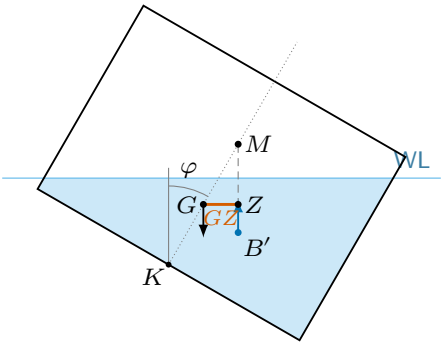
$$\frac{1}{2}m\left(l\theta'(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\theta(t)^2 + mgl\cos\theta(t) = c.$$

Her er $mgl\cos\theta$ den potensielle energien til massen, siden den sitter $l\cos\theta$ over gulvet, og $\frac{1}{2}k\theta^2$ er energien som er lagret i fjæren. For små utslag er $\sin\theta \approx \theta$, og da står det

$$ml^2\theta''(t) + (k - mgl)\,\theta(t) = 0.$$

Stangen svinger rundt loddlinjen hvis $k > mgl$, og velter hvis $k < mgl$.

Et skip er en slik stang. Tyngdepunktet G ligger KG over kjølen K, så krenger skipet vinkelen φ, gir tyngdekraften momentet $\Delta\, KG\sin\varphi$ om kjølen, der $\Delta = mg$ er vekten av skipet. Fjæren er oppdriften: Den angriper i tyngdepunktet B' til den neddykkede delen av skroget, som flytter seg ut mot den siden som går ned, og gir et moment tilbake. Netto blir det rettende momentet $\Delta\, GZ(\varphi)$, der den **rettende armen** GZ er den vannrette avstanden fra G til virkelinjen til oppdriften.[a]



[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height

Newtons andre lov for rotasjon om rulleaksen gir

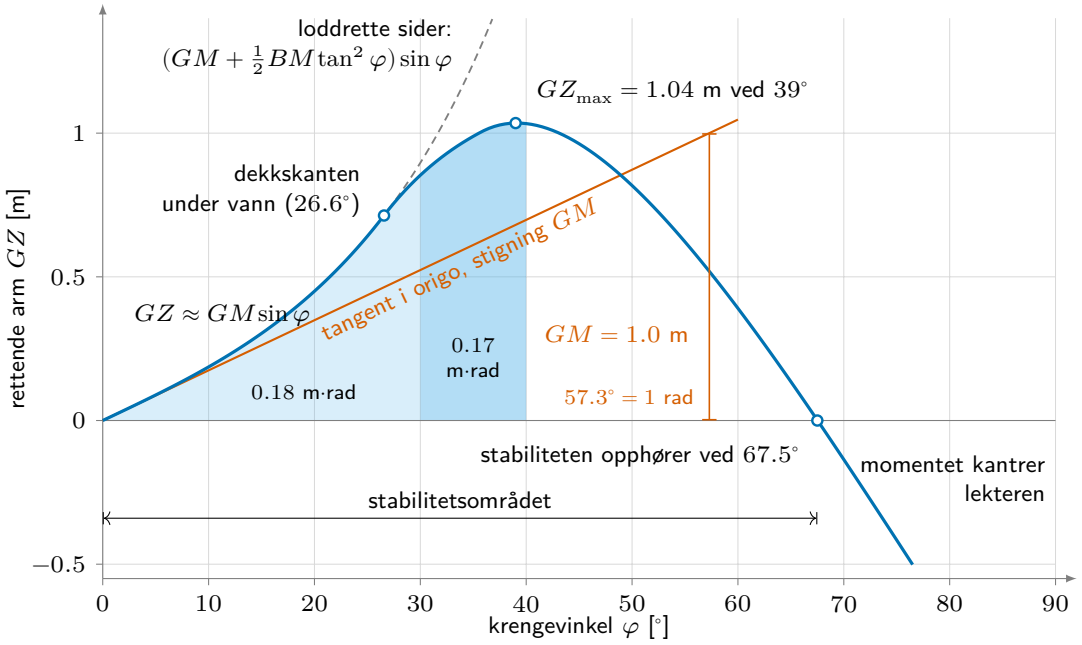
$$I\varphi''(t) + \Delta\, GZ(\varphi(t)) = 0$$

der I er treghetsmomentet om rulleaksen. For små vinkler er $GZ \approx GM \sin\varphi$, der **metasenterhøyden** GM er avstanden fra G opp til punktet M der virkelinjen til oppdriften krysser senterlinjen i skipet, og da står det

$$I\varphi''(t) + \Delta\, GM \sin\varphi(t) = 0.$$

Dette er pendellikningen med I i rollen til ml^2 og $\Delta\, GM$ i rollen til mgl, så skipet ruller som en pendel med lengde $I/(m\,GM)$, og ligger G over M, velter det akkurat som stangen gjør når $k < mgl$.

For store vinkler må GZ regnes ut fra formen på skroget. Figuren viser GZ som funksjon av krengevinkelen for en lekter formet som en boks, 20 meter bred, 12 meter høy og med 7 meter dypgang, lastet slik at $GM = 1$ meter.



Frem til dekkskanten går under vann ved 26.6°, følger kurven den stiplede formelen for et skip med loddrette sider, og den ligger over tangenten $GM\varphi$. Så flater den ut, når toppen 1.04 meter ved 39° og krysser null ved 67.5°. Krenger lekteren mer enn det, kantrer den. Ganger vi rullelikningen med $\varphi'(t)$ og integrerer, får vi

$$\frac{1}{2}I\varphi'(t)^2 + \Delta \int_0^{\varphi(t)} GZ(\psi)\, d\psi = c.$$

Den potensielle energien er altså vekten av skipet ganger arealet under GZ-kurven. Arealet frem til 67.5° er 0.65 m·rad, så en bølge må tilføre energien $0.65\,\Delta$ for å kantre lekteren. Derfor stiller IMO krav til arealet under kurven:[10] minst 0.055 m·rad frem til 30° og minst 0.030 m·rad mellom 30° og 40°. Lekteren har 0.18 og 0.17.

TORRICELLIS LOV

I modelleringsforelesningen i fjor lagde jeg et enkelt eksperiment: Jeg stakk hull i bunnen på en tom ølboks, skar ut en loddrett stripe i siden og teipet over, slik at man kunne se vannstanden $h(t)$ mens boksen tømtes. Så prøvde jeg to modeller. I den første antar vi bare at endringsraten til vannstanden

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/International_Code_on_Intact_Stability

er proporsjonal med vannstanden:

$$h'(t) = -\lambda h(t) \qquad h(0) = h_0.$$

Dette er samme likning som for radioaktiv nedbrytning, så løsningen er

$$h(t) = h_0 e^{-\lambda t}.$$

I den andre antar vi at den kinetiske energien til hvert vannmolekyl som går ut gjennom hullet, er hentet fra den potensielle energien til et tilsvarende vannmolekyl i det øverste laget i boksen. Har molekylet masse m og fart v ut av hullet, betyr det at

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

der g er tyngdeakselerasjonen. Dette gir **Torricellis lov**:[11]

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Vannet kommer altså ut av hullet like fort som om det hadde falt fritt fra overflaten. Vannvolumet i boksen er $Bh(t)$, der B er arealet av tverrsnittet til boksen, og det minker med Av per tidsenhet, der A er arealet av hullet:

$$Bh'(t) = -A\sqrt{2gh(t)} \qquad h(0) = h_0.$$

Prinsippet om å gange likningen med et eller annet og integrere virker fremdeles, det bare heter separabel likning istedet. Vi deler på $2B\sqrt{h(t)}$:

$$\frac{h'(t)}{2\sqrt{h(t)}} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

Venstresiden er nå nøyaktig det vi får når vi deriverer $\sqrt{h(t)}$ med kjerneregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt}\sqrt{h(t)} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

Nå integrerer vi begge sider fra 0 til t og får

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = -\frac{A}{B}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t.$$

Boksen er tom når $\sqrt{h(t)} = 0$, altså etter tømmetiden

$$T = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

og frem til da er

$$h(t) = h_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Den første modellen sier at boksen aldri blir helt tom, mens Torricellis lov sier at vannstanden følger en parabel med bunnpunkt akkurat idet boksen er tom. Jeg fikk en student i hver parallell til å filme vannstanden etter som boksen tømtes, og så notere ned tidspunkter mot vannstand og så sjekket vi begge modeller. Det var faktisk den første modellen som spådde vannstanden best - Torricelli gjør noen antagelser som sjelden stemmer.

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law`

LOGISTISK VEKST

Ecolimodellen

$$x'(t) = ax(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0$$

spår eksponensiell vekst for all fremtid. Men som David Attenborough i 2013 uttalte under et foredrag i The Royal Geographical Society:
"Anyone who thinks that you can have infinite growth in a finite environment is either a madman or an economist."[12]
Dyr som formerer seg kan sjelden fortsette med det uten å før eller siden oppleve noen som helst form for begrensning i veksten.[13] Den enkleste utvidelsen for å inkorporere dette i modellen, er å erstatte a med en positiv funksjon som har et nullpunkt i den bestanden x som maksimalt kan opprettholdes på området. Hvis vi gjør det enkelt og sier at denne funksjonen skal være en rett linje, får vi det **logistiske problemet**[14]

$$x'(t) = a\,(1 - x(t)/k)\,x(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad a > 0,\ k > 0$$

der k er en konstant som kalles **bærekapasiteten**. Vi delbrøksoppspalter

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{x'(t)}{k - x(t)} = a.$$

Så lenge $0 < x(t) < k$, er venstresiden nøyaktig det vi får når vi deriverer $\ln x(t) - \ln(k - x(t))$ med kjerneregelen, så likningen kan skrives

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{x(t)}{k - x(t)} = a.$$

Nå integrerer vi begge sider fra 0 til t og får

$$\ln \frac{x(t)}{k - x(t)} - \ln \frac{x_0}{k - x_0} = at \qquad \text{eller} \qquad \frac{x(t)}{k - x(t)} = \frac{x_0}{k - x_0} e^{at}.$$

Løser vi for $x(t)$, får vi

$$x(t) = \frac{k x_0 e^{at}}{k - x_0 + x_0 e^{at}}.$$

REAKSJONSHASTIGHET

Kjemiske reaksjoner kan gå fort og langsomt, og det finnes differensiallikninger som modellerer reaksjonshastighet. Reaksjonshastighet er viktig, for noen reaksjoner bør helst gå fort (for eksempel forbrenning) mens andre bør gå sakte (for eksempel korrosjon). Atmosfæren består av 78 prosent nitrogen og 21 prosent oksygen. Ved vanlig trykk og temperatur reagerer ikke disse, men ved for eksempel lynnedslag eller forbrenning i dieselmotorer eller skogbrann blir det mer fart i dem, og så kombinerer de til nitrogenoksider ($\mathrm{NO_x}$). Det er disse som gir Los Angeles sin berømte smog.[15] I atmosfæren er det mange forskjellige reaksjoner mellom nitrogenoksider og oksygen. En av dem er at nitrogendioksid splitter i nitrogenmonoksid og oksygen:

$$2\mathrm{NO_2(g)} \to 2\mathrm{NO(g)} + \mathrm{O_2(g)}.$$

[12] Sitatets opprinnelse er noe usikker. Det var nok ikke han som fant det på.
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Gombe_Chimpanzee_War
[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function
[15] https://www.latimes.com/local/la-me-air-pollution-0428-pictures-photogallery.html

I noen tilfeller av denne går visst reaksjonsratene som kvadratet av konsentrasjonene

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

der **reaksjonshastigheten** k er en empirisk konstant som avhenger av trykk og temperatur og de støkiometriske koeffisientene og så videre. Det ryktes på internett at $k = 0.54$ liter per mol per sek for reaksjonen over ved 300 grader celsius. Likningen

$$\frac{d[\mathrm{NO}_2]}{dt} = -k[\mathrm{NO}_2]^2$$

og løsningen er

$$\frac{1}{[\mathrm{NO}_2]} - \frac{1}{[\mathrm{NO}_2]_0} = kt \qquad \text{eller} \qquad [\mathrm{NO}_2] = \frac{[\mathrm{NO}_2]_0}{1 + k[\mathrm{NO}_2]_0 t}$$

der $[\mathrm{NO}_2]_0$ er konsentrasjonen ved $t = 0$. Starter vi for eksempel med 0.01 mol per liter, er konsentrasjonen halvert etter $1/(0.54 \cdot 0.01) \approx 185$ sekunder.

AMMONITTEN

Bildet til høyre viser en ammonitt. La $b(\theta)$ være bredden på kamrene som funksjon av vinkelen θ. Dersom skallet beholder formen mens det vokser, er endringsraten til bredden proporsjonal med bredden:

$$b'(\theta) = \lambda b(\theta).$$

så

$$b(\theta) = b_0 e^{\lambda\theta}.$$

På bildet blir kamrene omtrent dobbelt så brede for hver omdreining, så $\lambda \approx \ln(2)/2\pi \approx 0.11$.



ELGTUNGEN

La oss si at du tar en nytrekt elgtunge med temperatur på 88 grader og nedsenker den i en bøtte med vann fra springen på 4 grader (dette er nødvendig om det skal gå lett å dra av skinnet) og setter bøtta ut på verandaen, der det er 0 grader. Da gir Newtons avkjølingslov differensiallikningene

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ x_2' &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2) \end{aligned}$$

der x_1 er temperaturen i elgtungen, x_2 er temperaturen i vannet, α_1 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og tungen og α_2 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen. Hvis vi setter

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2) \end{pmatrix}$$

og setter vi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, slik at vi får et håndterlig system:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Sorterer vi den ukjente i en søylevektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

blir likningssystemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La oss prøve gjetningene $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ og $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{c} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og se hva som skjer. Setter vi $\mathbf{x}$ inn i systemet, får vi

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den ene siden og

$$A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den andre. Setter vi disse lik hverandre og deler ut $e^{\lambda t}$ som vi pleier, får vi

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}.$$

Med andre ord må $\mathbf{c}$ være en av A sine egenvektorer og λ den korresponderende egenverdien om $\mathbf{x}$ som foreslått skal være en løsning. En to ganger to matrise har karakteristisk polynom av orden 2, så

det kan være maksimalt to egenverdier, og i $\mathbb{R}^2$ er det ikke "plass til" mer enn to lineært uavhengige egenvektorer, så mennesker som ikke er på galehuset vil forvente to lineært uavhengige løsninger. Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(-2-\lambda)-1\\ &= (1+\lambda)(2+\lambda)-1\\ &= 1+3\lambda+\lambda^2\end{aligned}$$

som har røtter

$$\lambda = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

slik at

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix}-2\\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix} + a_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2}\begin{pmatrix}-2\\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

Nå går det an å vise at dette er alle løsninger du noensinne kommer til å finne, men det er nok litt i tidligste laget for dette kurset. Hvis vi nå for eksempel ønsker oss finne ut når temperaturen i vannet er 13 grader får vi en fin uløselig likning. Initialkravet er $x_1(0) = 88$ og $x_2(0) = 4$, så konstantene må tilfredsstille

$$a_1\begin{pmatrix}-2\\ 1-\sqrt{5}\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-2\\ 1+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}88\\ 4\end{pmatrix}$$

som gir $a_1 \approx -32.73$ og $a_2 \approx -11.27$. Vanntemperaturen er

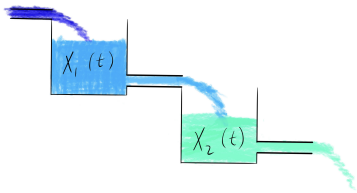
$$x_2(t) = a_1\left(1-\sqrt{5}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t/2} + a_2\left(1+\sqrt{5}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t/2}.$$

Likningen $x_2(t) = 13$ lar seg ikke løse med penn og papir siden x_2 er en lineærkombinasjon av to forskjellige eksponensialfunksjoner, men numerisk går det fint. Vannet er innom 13 grader allerede ved $t \approx 0.14$, men da er det på vei opp - toppen er om lag 25 grader ved $t \approx 0.8$. Så kjøler det seg ned igjen, og er tilbake på 13 grader ved $t \approx 3.0$.

STRØMNING I TANK

La $x_1(t)$ og $x_2(t)$ være konsentrasjonene av et eller annet stoff i to tanker som er koblet slik:

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1\\ x_2' &= x_1 - x_2\end{aligned}$$



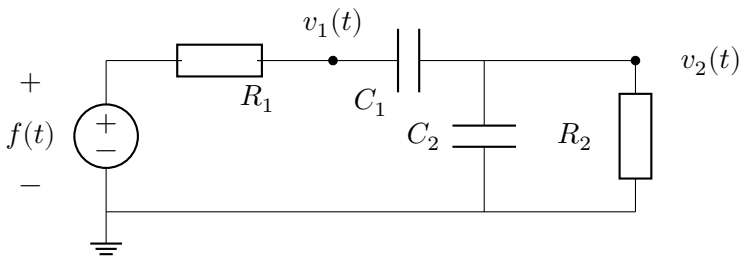
Her kommer det rent vann inn i den øverste tanken, og vi antar det er perfekt blanding i begge tanker, og så har jeg satt farten til én liter per sekund slik at systemet skal bli pent og pyntelig. Matrisen i dette systemet er ikke diagonaliserbar, men vi kan løse det med integrerende faktor (begynn med den første likningen):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(0)e^{-t}\\ x_2(t) &= (x_2(0)+x_1(0)t)e^{-t}.\end{aligned}$$

Faktoren t kommer av at løsningen av den første likningen blir påtrykt i den andre, som har samme tidskonstant.

BÅNDPASSFILTERET

To motstander og to kondensatorer som kobles til en spenningskilde slik, kalles et båndpassfilter om spenningen måles i punktet markert $v_2(t)$:



Differensiallikningssystemet for spenningene $v_1(t)$ og $v_2(t)$ blir

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i_1(t) - i_2(t)\,dt = f(t)$$

$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2}\int i_2(t) - i_1(t)\,dt = 0.$$

der i_1 og i_2 er sløyfestrømmer i hver maske. Det er også klart at

$$v_2(t) = R_2 i_2(t) = \frac{1}{C_2}\int i_1(t) - i_2(t)\,dt$$

og at

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt.$$

Nå kan vi kvitte oss med strømmene. Setter vi de to siste relasjonene inn i den første sløyfelikningen, kollapser den til

$$R_1 i_1(t) + v_1(t) = f(t) \qquad \text{slik at} \qquad i_1(t) = \frac{f(t) - v_1(t)}{R_1},$$

og Ohms lov gir

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2}.$$

Deriverer vi kondensatorrelasjonene, står det

$$v_2' = \frac{i_1 - i_2}{C_2} \qquad \text{og} \qquad v_1' = v_2' + \frac{i_1}{C_1}.$$

Som i lavpassfilteret ganger vi spenningen over hver kondensator med RC og setter

$$x_1(t) = R_1 C_1 (v_1(t) - v_2(t)) \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = R_1 C_2 v_2(t).$$

Da er $x_1' = R_1 i_1$ og $x_2' = R_1(i_1 - i_2)$, og setter vi inn strømmene, er systemet der:

$$x_1' = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \frac{1}{R_1 C_2} x_2 + f$$

$$x_2' = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) x_2 + f,$$

eller på matriseform:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & -\dfrac{1}{R_1C_2} \\ -\dfrac{1}{R_1C_1} & -\dfrac{1}{R_1C_2} - \dfrac{1}{R_2C_2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} f.$$