TMA4400

TEMATIME - 44 - H25

La oss si at vi har en kokt elgtunge med temperatur $T(t)$ som ved tiden $t = 0$ har temperaturen T_0, og så setter vi den inn i et kjøleskap med temperatur T_k. Newtons avkjølingslov er en litt grov, men ganske nyttig[1] modell som sier at temperaturendringen $\dot{T}(t)$ er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom kjøleskapet og elgtungen:

$$\dot{T}(t) = \alpha\,(T_K - T(t)) \qquad T(0) = T_0$$

Proporsjonalitetskonstanten $\alpha > 0$ inneholder all informasjon om hvor fort varmeflyten går mellom elgtungen og omgivelsene, og varmekapasiteten til elgtungen og så videre. Fra eksamen i TMA4100:

1 En elgtunge med temperatur 6°C settes på kjøkkenbenken. Etter to timer er temperaturen steget til 13°C, og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Finn α og lag et plot av temperaturen.

2 Da temperaturen var 15°C, ble elgtungen satt inn igjen i kjøleskapet. En time senere var temperaturen i tungen sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

Klassiker! Oppgave 7 herfra:

`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/tma4100_2013h.pdf`

La oss nå si at du tar den nytrekte elgtungen med temperatur på 88 grader og nedsenker den i en bøtte med vann fra springen på 4 grader (dette er nødvendig om det skal gå lett å dra av skinnet) og setter bøtta ut på verandaen, der det er 0 grader, gir Newtons avkjølingslov differensiallikningene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1\,(x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= \alpha_1\,(x_1 - x_2) + \alpha_2\,(0 - x_2)\end{aligned}$$

der x_1 er temperaturen i elgtungen, x_2 er temperaturen i vannet, α_1 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og tungen og og α_2 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen.

3 Høyresiden i dette likningssystemet er et matriseprodukt på formen $A\mathbf{x}$. Finn A.

La oss sette $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ eller $L_1 = L_2 = 1$, $R_2 = R_3 = 1$ og $R_1 = 0$, slik at vi får et litt håndterlig system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Dette kalles et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**. Det første vi må gjøre, er å sortere den ukjente i en søylevektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

[1] Jeg har brukt Newtons avkjølingslov med hell et par ganger når jeg skulle brygge øl og ikke hadde spiralkjøler. Vørteren må kjøles fra 373 til 298 K (da skal gjæren oppi), og dette tar noen timer. Dersom du måler temperaturen på minst to forskjellige tidspunkt, kan du estimere α og så gjøre et anslag på når temperaturen er riktig. Dette er gunstig, for da kan man gjøre noe annet i mellomtiden.

slik at likningsystemet blir

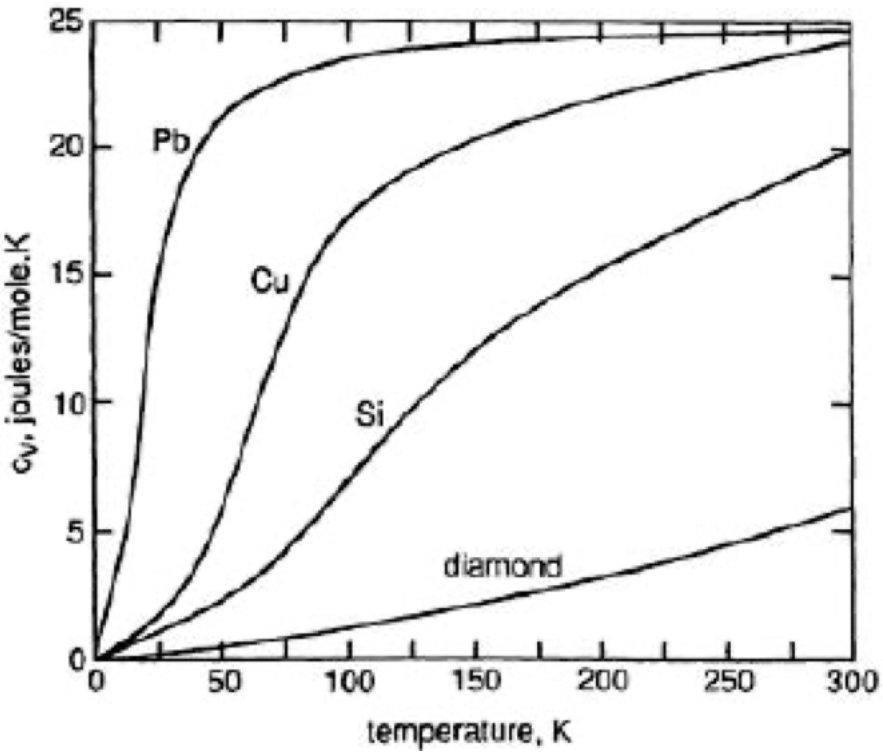
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Med andre ord må $\mathbf{c}$ være en av A sine egenvektorer og λ den korresponderende egenverdien om $\mathbf{x}$ som foreslått skal være en løsning.

4 Finn alle løsningene. Når er temperaturen i vannet 13 grader?

Proporsjonalitetskonstanten α forteller oss noe om hvor raskt varmen strømmer mellom elgtungen og omgivelsene, og det er en rimelig antagelse at α er avhengig av elgtungens varmekapasitet. I praksis kan vi forvente at varmekapasiteten er temperaturavhengig, slik at Newtons avkjølingslov blir

$$\dot{T}(t) = \alpha(T)\,(T_K - T(t)) \qquad T(0) = T_0$$



En av de enkleste modellene for hvordan krystallers varmekapasitet går som[2]

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2}\frac{e^{1/T}}{(e^{1/T}-1)^2}$$

(her er en haug med fysiske konstanter satt til én for å få et håndterlig uttrykk for en førsteklassing) slik at Newtons avkjølingslov blir

$$\dot{T} + \frac{1}{T^2}\frac{e^{1/T}}{(e^{1/T}-1)^2}\,(T - T_K) = 0 \quad T(0) = T_0.$$

5 Løs numerisk med fremlengs euler.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_solid